Logique Structurale Et Algébrique

Exercice :

a) P : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 \leq 4$ ou $n > 2$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{Z}$,

Si $n > 2$ alors $n^2 \leq 4$ et $n > 2$ est vraie

Soit $n \leq 2$, alors n peut prendre la valeur de -4

$n^2 = 16$ $\quad n = -4 \Rightarrow n < 2 \Rightarrow n^2 > 4$

donc P est fausse

b) φ : il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$

Soit x et $y \in \mathbb{R}^2$,

Si $x > y$, Alors $x > x - \varepsilon$ $\quad \varepsilon\ ]-1 ; 1[$

Alors $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow x^2 + (x - \varepsilon)^2 < 1$

si x prend la valeur de $0{,}5$ et que y prend la valeur de $0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

$0{,}5^2 + 0{,}3^2 < 1$

$0{,}25 + 0{,}06 < 1$ Vrai

Exercice :

a) $P : \forall P \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}, P + q < 2$

$\neg P : \exists P \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}, P + q \geq 2$

Soit $q \in \mathbb{N}$,

on pose $P = 2$ $\quad$ Soit $q \in \mathbb{N}$

alors $P + q = q + 2 \geq 2$

$\neg P$ est vraie donc P fausse

b) $\varphi : \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 1$

$\neg\varphi : \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

Si $y \leq 0$, Alors on peut dire que $y = 0$

donc $x \times y \leq 1 \Rightarrow x \times 0 \leq 1 \quad 0 \leq 1$

Si $y > 0$ et $x > 0$ Alors si on pose

$y = 5$, donc $5x \leq 1$ or si $x > 0$

Alors la proposition φ est fausse

Exercice : Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq$ $100^n - 1$ est un multiple de 99.

initialisation :

au Rang 0

$0 \geq 100^0 - 1$

$0 \geq 1 - 1 \Leftrightarrow 0 \geq 0$

hérédité $n+1$:

$100^n - 1 = 99 \times k$

donc :

$100^n = 99 \times k + 1$

$100^{n+1} - 1 = 100^n \times 100 - 1 = (99 \times k + 1)100 - 1$

Nombre Complexes (Suite) :

Rappels :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$x + 5 = 2 \Rightarrow x = -3$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Z}$

$2x = 5 \quad x = 5/2$

$\mathbb{Q} \quad \{\ldots \frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \ldots\}$

$\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0 \ldots\}$

$\mathbb{R}$

$x^2 = -2$

$\mathbb{C} = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad i^2 = -1$

$(\sqrt{2}\, i)^2 = (\sqrt{2})^2 (i)^2$

$= -1 \times 2$

$= -2$

$x^2 = -2$

a deux racines dans $\mathbb{C}$

$+i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

$z = a + ib$

$Re(z) = a$

$Im(z) = b$

Règles de Calcul :

Addition

$(a + ib) + (a' + ib')$

$= a + ib + a' + ib'$

$= a + a' + ib + ib'$

$= a + a' + i(b + b')$

Multiplicat.

$(a + ib)(a' + ib')$

$= aa' + iba' + aib' + ibib'$

$= (aa' + i^2 bb') + (iba' + iab')$

$= (aa' - bb') + i(ab' + ba)$

$i^2 = -1$

conjugué

Pour $z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = a - ib$

$\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = \overline{a + i(-b)}$

$= a - i(-b)$

$= z$

$z = a + ib$

$a, b \in \mathbb{C}$

$\bar{z} = \overline{a + ib}$

$\bar{z} \neq a - ib$

$z = 2 + i + i(3 + 2i$

$\bar{z} \neq 2 + i - i(3 + 2i)$

$z = 2 + i + i3 - 2$

$z = 4i \qquad \bar{z} = -4i$

$z = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$ Module $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z\bar{z} = aa \cancel{- iba} \cancel{+ iba} - i^2 bb$

$\bar{z}z = aa + bb = a^2 + b^2$

Symétrique ou opposé de z

$-z = a - ib$

$z + (-z) = -z + z = 0$

$z - z = -z + z = 0$

Inversion de z :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R} \quad z \neq 0$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

Remarque Simplifier

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x = \frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 \times (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

Propriétés :

$$Re(z+z') = Re(z) + Re(z')$$

$$Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$$

dém :

$$z = a + ib \qquad z' = a' + ib'$$

$$a, b, a', b' \in \mathbb{R}$$

$$z + z' = (a+ib) + (a'+ib')$$

$$z + z' = \underbrace{a+a'}_{\in \mathbb{R}} + i\,(\underbrace{b+b'}_{\in \mathbb{R}})$$

donc $Re(z+z') = a + a'$

$Im(z+z') = b + b' = Im(z) + Im(z')$

$Re(iz) \overset{?}{=}$

$Im(iz) \overset{?}{=}$

$iz = i(a+ib)$

$ia + i^2 b = -b + ia$

$Re(iz) = -b = -Im(z)$

$Im(iz) = a = Re(z)$

$\overline{zz'} = (a-ib)\times(a-ib')$

$z = a+ib$

$z' = a+ib'$

$\overline{z}\,\overline{z'} = a^2 - iab + iab'$

$+ i^2 bb' = a^2 - bb'$

ou a bien $\overline{z}\,\overline{z'} = \overline{zz'}$

Propriété du conjugué,

$\overline{1} = 1 \quad \overline{i} = -i \qquad u, v \in \mathbb{C}$

$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$

$\overline{uv} = \overline{v}\ \overline{u}$

$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$

$\overline{\left(\frac{u+iv}{u-iv}\right)} = \frac{\overline{u+iv}}{\overline{u-iv}} = \frac{u-iv}{u+iv}$

Module Propriétés:

Si $a \in \mathbb{R}$, alors

$a = a + i(0) \in \mathbb{C}$

$|a| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a| = -a$ ou a

$a \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2} = |a|$

$a \in \mathbb{R}^+\ (\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \neq 1-\sqrt{3}\ (<0)$

$|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3})$
$= \sqrt{3}-1 > 0$

$|2+3i| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$|2| = 2$

$|3i| = 3$

$i = 0 + i(1)$ module de i
$\quad \mathbb{R} \quad \mathbb{R}$
$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

Propriétés:

$|z| = 0 \iff z = 0$

$|\lambda z| = \lambda |z|,\ \lambda \geq 0$

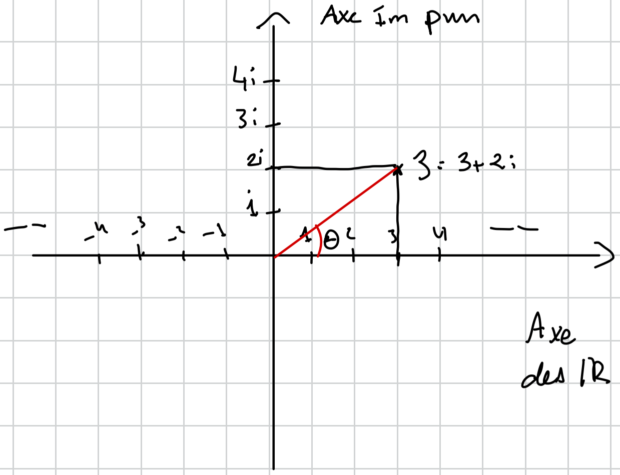
$|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$||z| - |z'|| \leq |z+z'|$

$\leq |z-z'|$

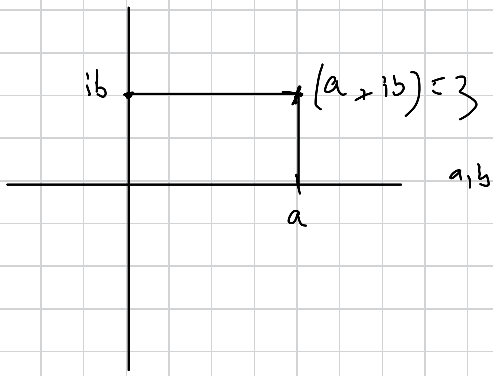
$|zz'| = |z||z'| \qquad \frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right| \qquad \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$

Représentation de $\mathbb{C}$ géométriquement:



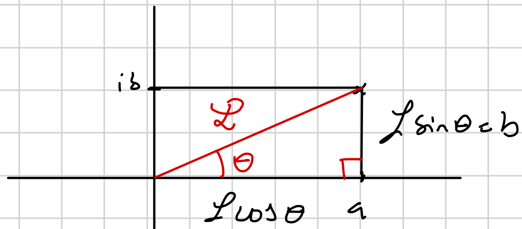
$z = 3+2i \Rightarrow$ forme Algébrique

Forme Algébrique



$a, b \in \mathbb{R}$

Forme polaire / Trigonométrique



$r\cos\theta = a$

$r^2 = b^2 + a^2$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$

$\sin\theta = \dfrac{b}{r}$

$z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \quad \sin = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

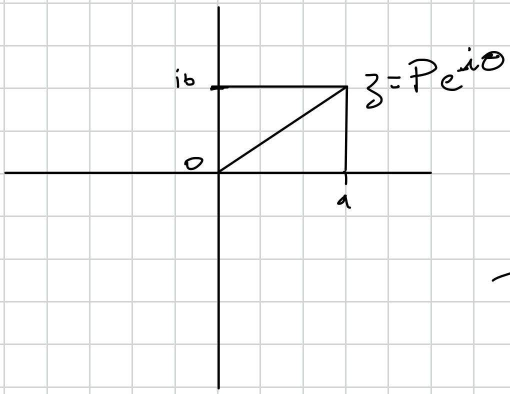
$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

forme exponentielle:

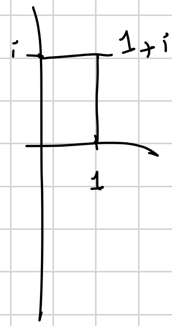
On pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

exponentielle complexe



Exemple :

$z = 1+i$



Trigonométrique

$$\ell^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \ell = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

Algèbre : $|1+i| = |(1) + i(1)| = \sqrt{2}$

$P = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\ell = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \ (+2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

θ est un argument de z

$\theta = \operatorname{Arg}(z)$.
$\ell = |z|$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Chapitre 3

Ensemble : collection d'élément

x element E. $x \in E$

$x \in E$ sinon $x \notin E$

Exemple d'ensembles :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1\}$ entiers relatifs

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ nombres rationels

$\mathbb{R} = \{\sqrt{2}, \pi, \frac{-2}{3}\}$ nombres réels

$\mathbb{C} = \{x + iy / x, y \in \mathbb{R}\}$ nombres complexes

Définition directe :

$E = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} / n \text{ pair et } 0 \leq n \leq 9\}$

Définition en Compréhension :

Entiers pairs :

$P = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, n = 2p\}$

$= \{2p / p \in \mathbb{Z}\}$

Axiomes :

Axiome des ensembles vides.

Il existe un ensemble qui est contenu dans tous les ensembles. Il est appelé l'ensemble vide et il est noté : $\emptyset$

Définition : Inclusion

on dit que un ensemble A est inclus dans un ensemble B et on écrit $A \subset B$ ou $B \supset A$ (B contient A)

Si tout élement de $A \in B$

$$(A \subset B) \Rightarrow (\forall x \in A,\ x \in B)$$

⚠ Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

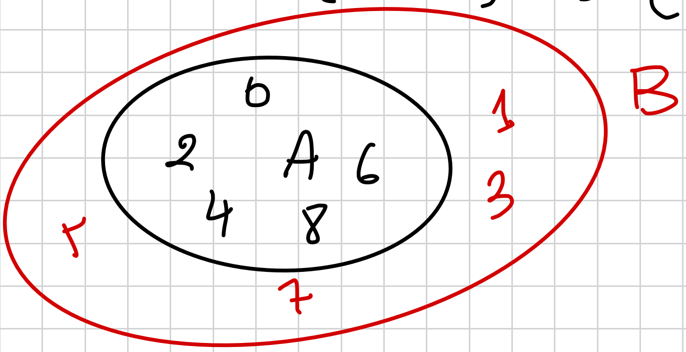
Propriétés opérations sur les ensembles :

$A, B, C, \ldots, E, F$ ensembles

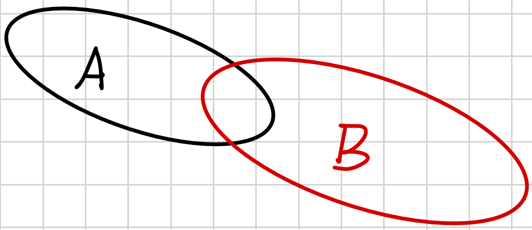
$a, b, c, \ldots, x, y, z$ élements

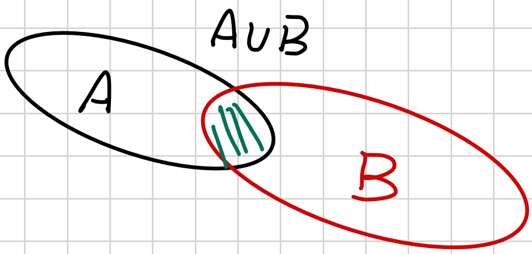
Inclusion :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x\ A,\ x \in B)$$



Réunion : $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$



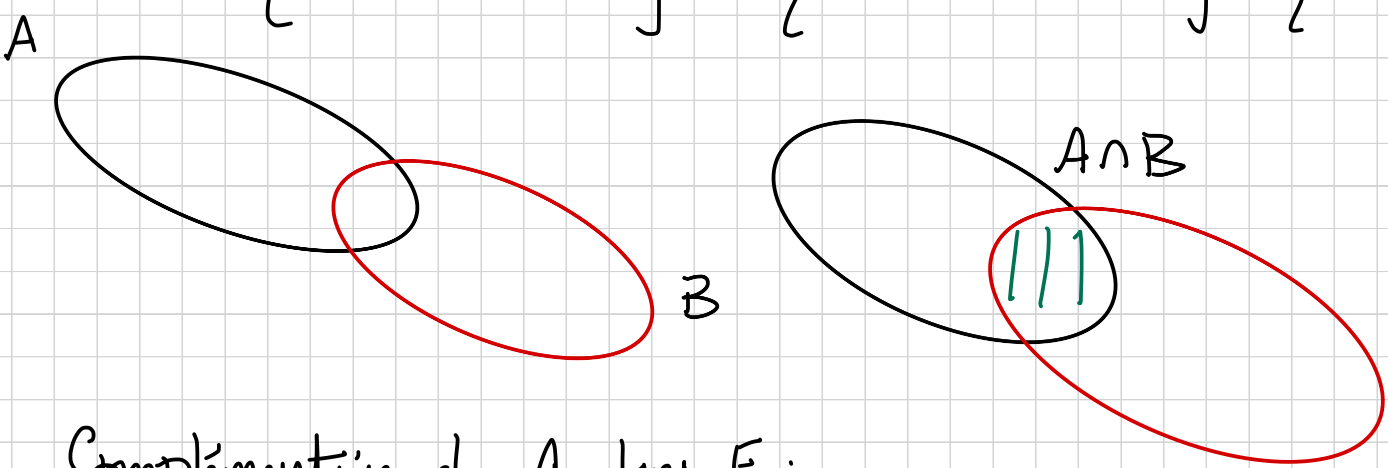


$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

Intersection : $A \cap B = \{ x \,/\, x \in A \text{ et } x \in B \}$

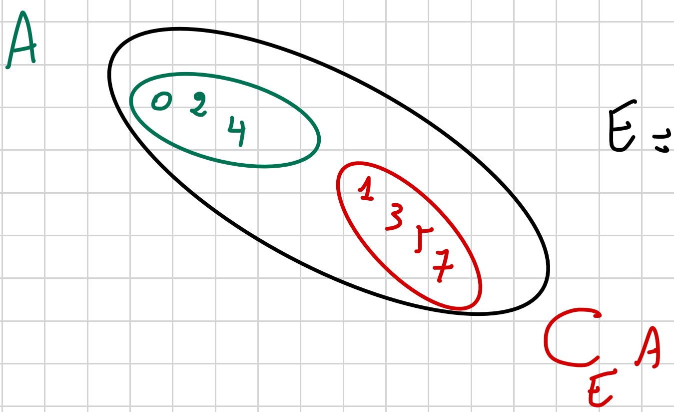
$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 2, 4\}$$



Complémentaire de A dans E :

Si $A \subset E$, $\complement_E A = E \setminus A = \{ x \in E \,/\, x \notin A \}$

$$(x \in \complement_E A) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$$



$E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Si $x \in A$ alors :

$$(x \in \complement_E A) \Leftrightarrow (x \notin A)$$

$$(x \notin \complement_E A) \Leftrightarrow (x \in A)$$

Autres notations :

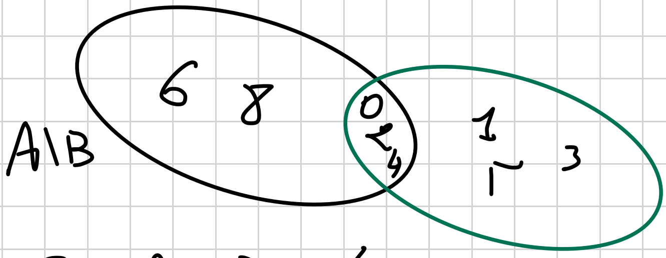
$\complement_E A = \complement A = \overline{A}$ quand le contexte est clair.

Différences d'ensemble :

$$A \setminus B = \{ x \in A \,/\, x \notin B \}$$

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow \big((x \in A) \text{ et } (x \notin B) \big)$$

Si $B \subset A$ alors $A \setminus B = \complement_A B$



- Si $A \cap B = \emptyset$

on dit que A et B sont disjoints.

Pairs $\cap$ impair $= \emptyset$

. A, B, C sont disjoints 2 à 2

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$

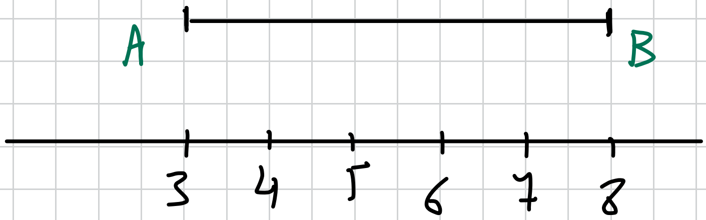
$P = \{2p \,/\, p \in \mathbb{Z}\}$ nbres Pairs

$I = \{2p+1 \,/\, p \in \mathbb{Z}\}$ nbres impair

$P \cap I = \emptyset$ $\qquad C_{\mathbb{Z}} P = I$

$P \cup I = \mathbb{Z}$ $\qquad C_{\mathbb{Z}} I = P$

2/ $A = [3 \;\; 5]$, $B = [4 \;\; 8]$ $\qquad A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 3$ et $x \leq 5\}$



$A \cup B = [3 \;\; 8]$

$A \cap B = [4 \;\; 5]$

$A \setminus B = [3, 4[$

$B \setminus A =]5, 8]$

$C_{\mathbb{R}} A =]-\infty ; 3[\cup]5 ; +\infty[$

$C_{\mathbb{R}} B =]-\infty ; 4[\cup]8 ; +\infty[= \{4x \in \mathbb{R} \,/\, x < 4$ ou $x > 8\}$

$(x \in A) \Longleftrightarrow \big((x \geq 3) \text{ et } (x \leq 5)\big)$

$(x \notin A) \Longleftrightarrow \big((x < 3) \text{ ou } (x > 5)\big)$

Propriétés $\cap \cup \complement \setminus$

commutativité : $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Associativité :

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cap (B \cap C) \cap D) = A \cap B \cap C \cap D.$

⚠ $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cap C)$

Distributivité :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

dém : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in (B \cup C))$

$\Longleftrightarrow (x \in A) \text{ et } ((x \in B) \text{ ou } (x \in C))$

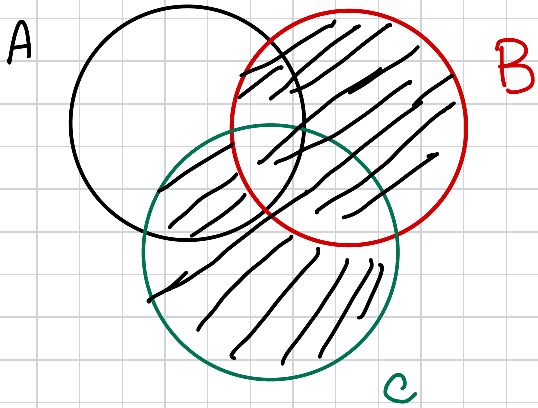
$\Longleftrightarrow ((x \in A) \text{ et } (x \in B)) \text{ ou } ((x \in A) \text{ et }$
$(x \in C))$

$\Longleftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$

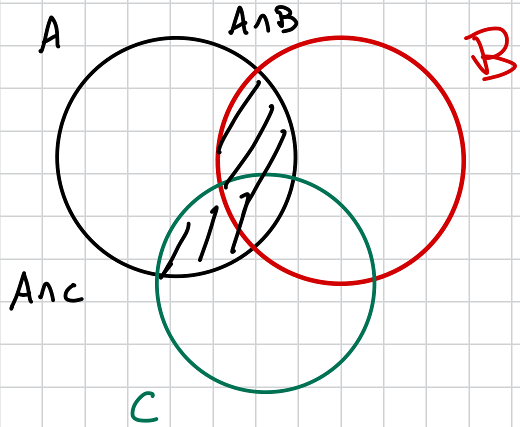
$\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

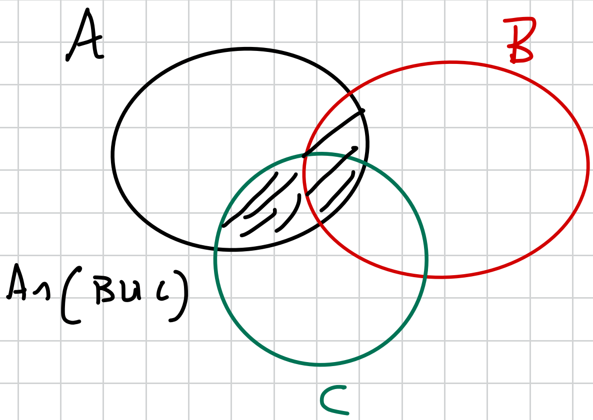
$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Longleftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou }$
$(P \text{ et } R)]$ $\quad P, Q, R$ propriétés.

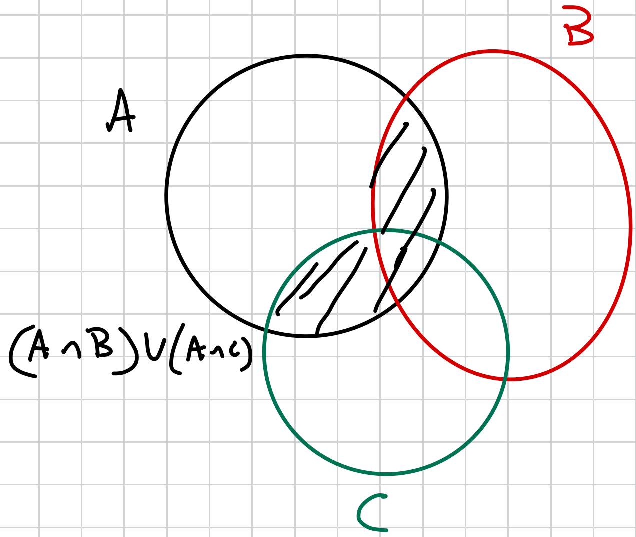
Démonstration "heuristique" :



$B \cap C$







Régles de calcul :

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\qquad A \cap A = A$

$A \cap B = A \iff A \subset B$

$A \cup \emptyset = A$ $\qquad A \cup B = A \iff B \subset A$

$C(C_A) = A$ $\qquad (A \subset B) \iff (C_B \subset C_A)$

$$\begin{cases} C(A\cup B) = (C_A) \cap (C_B) \\ C(A\cap B) = (C_A) \cup (C_B) \end{cases}$$

L1 IEEEA, 2023-2024 Université de Rouen-Normandie
Lundi 18 septembre 2023

Fiche n° 2 - Nombres comlexes

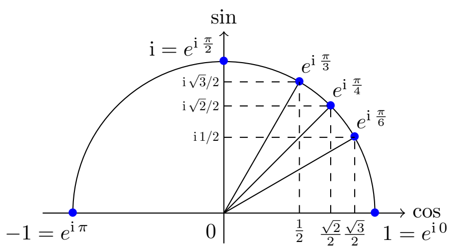
Rappel : Le corps des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{z = a + \mathrm{i}b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ (avec $\mathrm{i}^2 = -1$).

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, u et v des nombres complexes (non nuls si ils sont en quotient) et $n \in \mathbb{Z}$:

- Addition : $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$
- Multiplication : $(a + ib) \times (a' + ib') = aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + \mathrm{i}^2\, bb' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$
- Parties réelles et imaginaires : $\mathrm{Re}\, z = a$, $\mathrm{Im}\, z = \breve{b}$ (donc $z = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$)
- Conjugué : $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$. Alors $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{u-v} = \bar{u} - \bar{v}$, $\overline{u\,v} = \bar{u}\,\bar{v}$, $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$, $\overline{(u^n)} = (\bar{u})^n$
$z\,\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)\,(a - \mathrm{i}b) = (a)^2 - (ib)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2\, b^2 = a^2 + b^2$
- Module : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\;(= |\bar{z}|)$. $\big||u| - |v|\big| \leq |u + v| \leq |u| + |v|$, $|u\,v| = |u|\,|v|$, $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$, $|u^n| = |u|^n$
- inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ou bien $\frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}$
- **Forme algébrique** : $z = a + ib$ avec a, $b \in \mathbb{R}$
- **Forme polaire ou (forme trigonométrique)** : $z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$
$\rho = |z|$ est le module et θ est un **argument** de z (pour $k \in \mathbb{Z}$, alors $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z)
- Relations entre forme algébrique et forme polaire : Pour $z = a + \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ $(z \neq 0)$, on identifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \rho\cos\theta \\ b & = & \rho\sin\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 + b^2 & = & \rho^2 \\ \cos\theta & = & \frac{a}{\rho} \\ \sin\theta & = & \frac{b}{\rho} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta & = & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta & = & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right.$$

- Exponentielle complexe: Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
Donc on a aussi : $\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta})$, $\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta})$
Multiplication, puissance, quotient : $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta + \theta')}$, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta - \theta')}$
- **Forme exponentielle** : $z = \rho\, e^{i\theta}$
- Multiplication , puissance, quotient : $(\rho\, e^{\mathrm{i}\theta}) \times (\rho'\, e^{\mathrm{i}\theta'}) = (\rho\rho')\, e^{i(\theta + \theta')}$, $(\rho\, e^{\mathrm{i}\theta})^n = \rho^n\, e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{\rho\, e^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\, e^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\, e^{i(\theta - \theta')}$
- Valeurs remarquables de $e^{\mathrm{i}\theta}$:



$e^{\mathrm{i}0} = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) = 1$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2) = \mathrm{i}$
$e^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$

Exercice 1. On pose $z = 3 + 2\mathrm{i}$, $z' = 2 - \mathrm{i}$.
(a) Calculer $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $\bar{z}$, $\bar{z'}$, $z\,\bar{z}$, $|z|$, $|z'|$.
(b) Calculer les nombres complexes suivants : $z + z'$, $z\,z'$, z^2, z/z', $1/z'$.
(c) Placer les points z, z', $\bar{z'}$, $1/z'$, $z + z'$, $z\,z'$ dans le plan complexe.

Exercice 2. On pose $z = 2 + 2\mathrm{i}$, $z' = 3\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
(a) Placer ces points dans le plan complexe et calculer $|z|$, $|z'|$, $\arg z$, $\arg z'$, $\mathrm{Re}\,(z')$, $\mathrm{Im}\,(z')$.
(b) Calculer les nombres complexes suivants : $z + z'$, $z\,z'$, z^2, z/z', $1/z'$. Placer ces points dans le plan complexe.

Exercice 3. Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer que :
(a) $\mathrm{Re}\,(\bar{z}) = \mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(\bar{z}) = -\mathrm{Im}\,(z)$, $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$, $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$
(b) $\overline{(z\,z')} = \bar{z}\;\overline{z'}$, $|z\,z'| = |z|\,|z'|$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'}) + |z'|^2$ (c) $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

TD 2 : LSA

Exercice 1 : on pose $z = 3+2i \quad z' = 2-i$

a) $Re(z) = 3 \qquad \bar{z} = 3-2i$

$Im(z) = 2 \qquad \bar{z}' = 2+i$

$z\bar{z} = (3+2i)(3-2i)$

$z\bar{z} = 9 \cancel{-6i} \cancel{+6i} + 4$

$z\bar{z} = 13$

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

$|z| = \sqrt{3^2+4^2}$

$|z| = \sqrt{13}$

$|z'| = \sqrt{3^2+(-2)^2}$

$|z'| = \sqrt{13}$

b) ① $z+z' = 3+2i + 2-i$

$z+z' = 5+i$

② $zz' = (3+2i)(2-i)$

$zz' = 6-3i+4i-2i^2$

$zz' = 6+i+2$

$zz' = 8+i$

③ $z^2 = z * z = (3+2i)^2 = 3^2+12i-4$

$z^2 = 5+12i$

(4) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3+2i}{2-i} = \dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

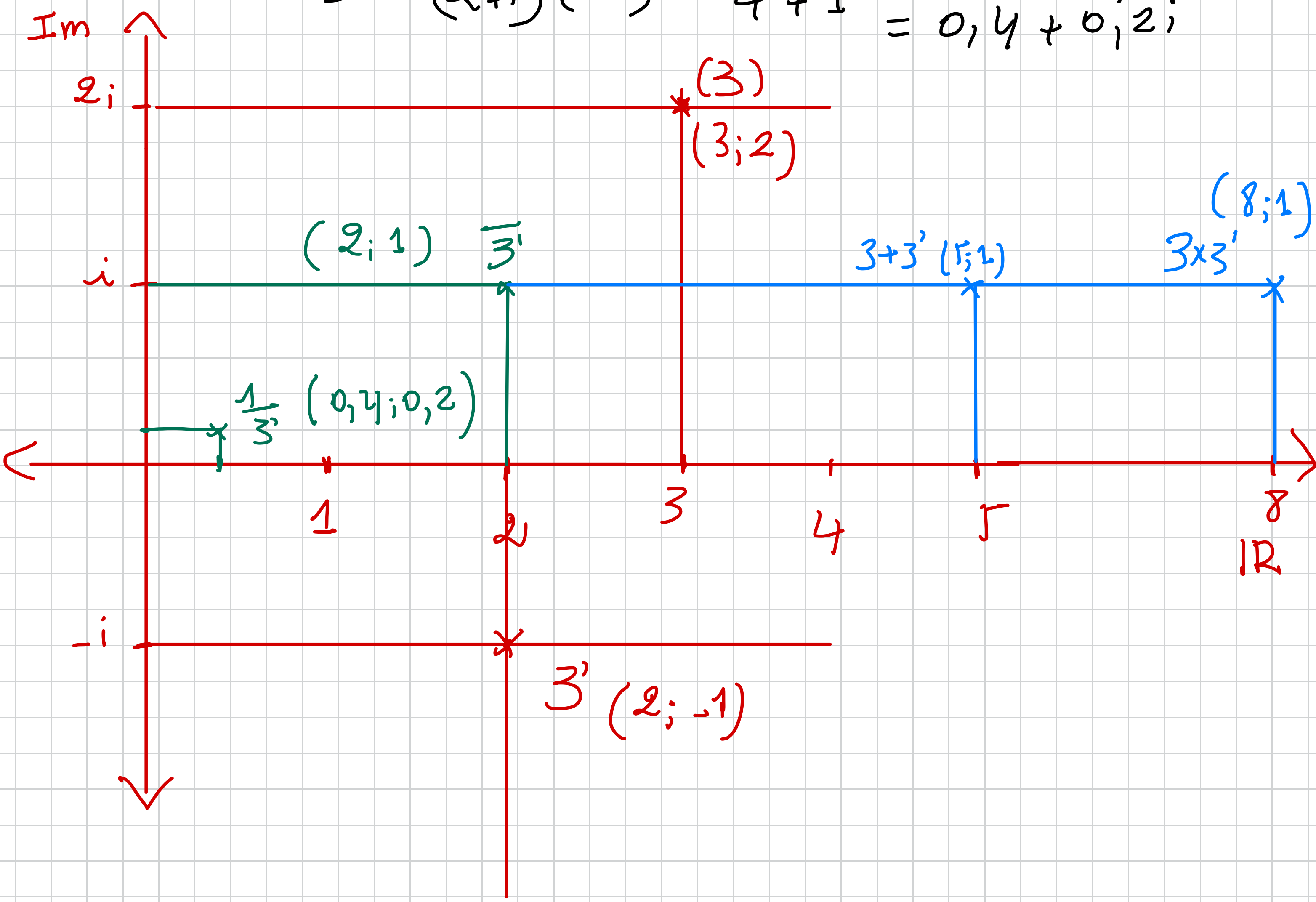
$$\frac{z}{z'} = \frac{6+7i-2}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+7i}{4+1}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{7i}{5}$$

$$\frac{z}{z'} = 0{,}8 + 1{,}4i$$

(5) $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{z''}{z''z'} = \dfrac{(2+i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{(2+i)}{4+1} = 0{,}4 + \dfrac{1}{5}i$

$$= 0{,}4 + 0{,}2i$$



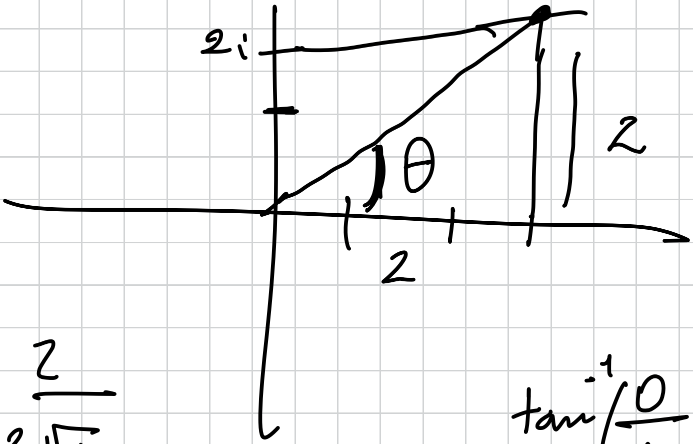
Exercice 2 :

on pose $z = 2+2i$ $\quad z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$|z'| = 3$

$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(z) = 45$



$\arg(z') = 30$

$\cos\theta\left(\frac{Re(z)}{|z|}\right) = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan^{-1}\left(\frac{O}{A}\right)$

$\tan^{-1}(\theta)\left(\frac{2}{2}\right)$

$\sin\theta\left(\frac{Im(z)}{|z|}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Re(z') = 3 \times \cos(\theta) = 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}6$

$Im(z') = 3 \times \sin(\theta) = 3 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$2{,}6 + i\,1{,}5$

$z + z' = (2+2i) + 3e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z + z' = 2 + 2i + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

$z + z' = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2i + \frac{3}{2}i$

$z + z' = 4{,}6 + 3{,}5i$

zz' ?

$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|}$

$\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|}$

$$z^{2} = z * z = (2+2i)(2+2i)$$

$$z^2 = 2^2 + 8i - 4$$

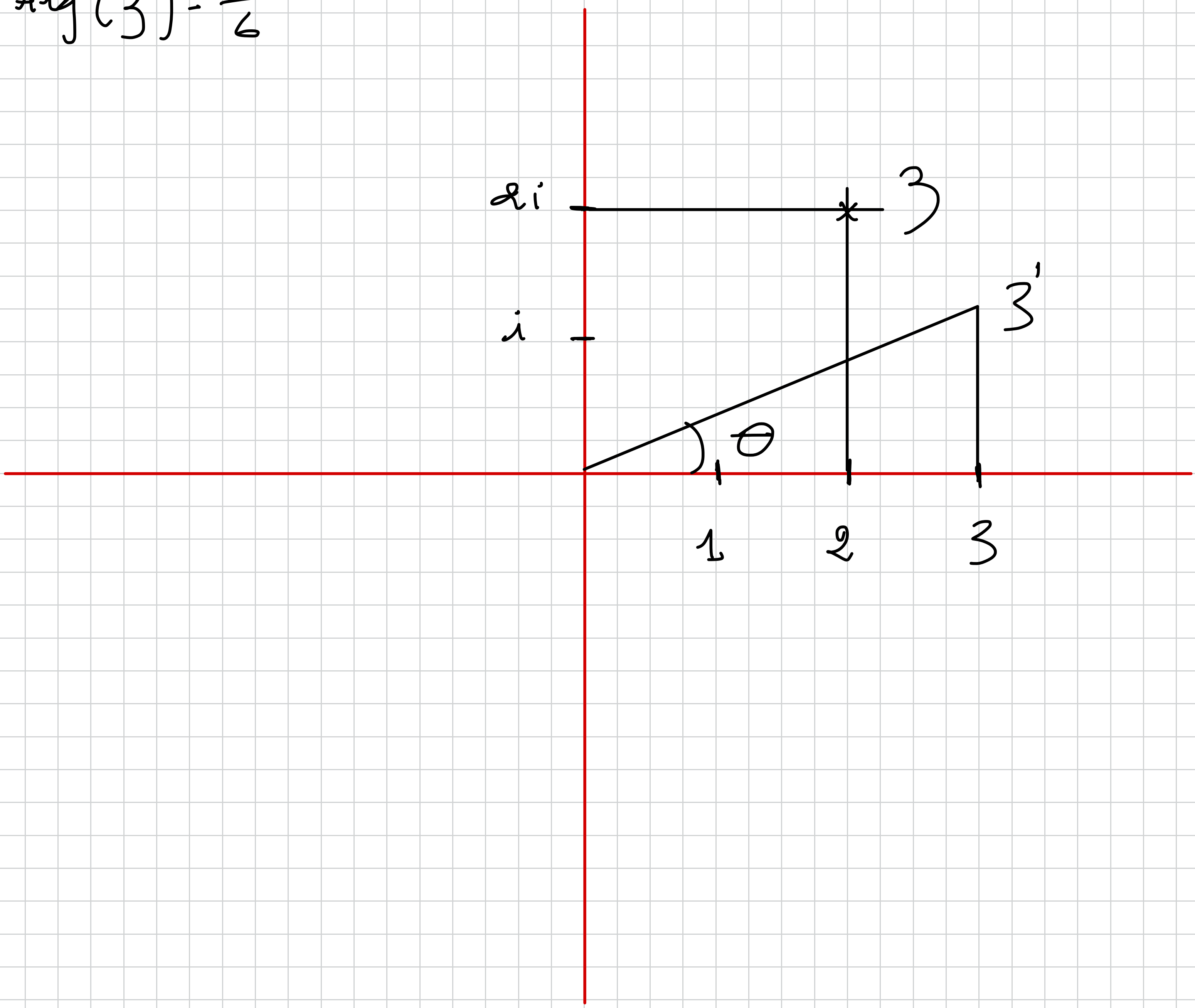
$$z^2 = 8i$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{3e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

Placer dans le plan complexe

$\arg(z) = 45$

$\operatorname{Arg}(z') = \frac{\pi}{6}$



Exercice 3 : Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ Demontrez que :

a) $Re(\bar{z}) = Re(z)$

$z = \underline{a} + ib$ $\quad \bar{z} = \underline{a} - ib$ $\quad z + \bar{z} = a \cancel{+ ib} + a \cancel{- ib}$

$Re(z) = a$ $\quad z + \bar{z} = 2a = a + a$

$Re(\bar{z}) = a$

$Im(z) = -Im(\bar{z})$ $\quad z - \bar{z} = \cancel{a} + ib \cancel{- a} + ib$

$a + ib$ $\quad a - ib$ $\quad z - \bar{z} = 2ib = ib + ib$

$Im\ b$ $\quad Im\ -b$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

Soit $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib$$

$$z + \bar{z} = 2a + ib - ib = 2a$$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = a \iff a = Re(z)$$

alors $\dfrac{z + \bar{z}}{2} = Re(z)$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

soit $z = a + ib$ $\qquad \bar{z} = a - ib$

$\mathrm{Im}(z) = b$ $\qquad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -b$

$$z - z' = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib$$

$$z - z' = 2ib$$

$$\frac{z - z'}{2} = ib$$

$$\frac{z - z'}{2i} = b \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z')$$

Exercices

Exo 1 :

a) P : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n^2 \leq 4$ ou $n > 2$

Soit $n \in \mathbb{Z}$;

si $n > 2$ alors $n^2 \leq 4$ ou $n > 2$ est vrai

pour $n = -3$ $n^2 > 4$ et $n < 2$ donc faux

b) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$

on pose : $y = 0$, on cherche $x \in \mathbb{R}$

on choisit $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4} < 1$ Vraie

Exercice 2 :

a)

P	Q	P ou Q	$\neg P$	$\neg P$ ou Q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

b) $(P$ ou $Q) = (\neg P$ ou $Q)$

Exercice 3 :

a) $P : \forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}, p+q < 2$

$\neg P : \exists p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}, p+q \geq 2$

Soit $p \in \mathbb{Z}$;

on pose $q = 2$, $p+2 < 2$

$p+2<2$ donc faux P est faux

$\neg P$ est vraie

b) $\varphi : \forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 1$

$\neg\varphi : \exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

on pose $y = \frac{2}{x}$

Alors $xy = x\frac{2}{x} = 2 > 1.$

φ est donc vraie (et $\neg\varphi$ est fausse)

Exercice 4 :

$n \geq 0$, $100^n - 1$ est un multiple de 99.

Initialisation :

Au rang 0 ;

$0 \geq 100^0 - 1$

$0 \geq 1 - 1$

$0 \geq 0$ vraie $0 \times 99 = 0$

Hérédité au rang $n+1$:

$n+1 \geq 100^{n+1} - 1$

$$n+1 \geq (100^n \times 100) - 1$$

$$n+1 \geq (100^n - 1) \times 99$$

étant donc qu'un multiple de n s'écrit de la forme $99 \times k$ alors au rang $n+1$ $100^n - 1$ est un multiple de 99.

Exercice 4:

P : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $(n^2 \geq 1)$

pour $n \in \mathbb{Z}$ si $n \geq 1$ ou $n \leq -1$ alors $n^2 \geq 1$ vraie

sinon, $n < 1$ et $n > -1$ donc $n = 0$ donc $n = 0$ (car $n \in \mathbb{Z}$)

et donc $n \leq 0$ est vraie. P est vraie

φ : Il existe $x \in \mathbb{R}$, $(x > 5)$ et $(x^2 < 2)$

Si $x > 5$ alors $x^2 > (5)^2$

$x^2 > 25 \neq x^2 > 2$ $x^2 > 25$

donc φ est fausse.

Exercice 5 :

P : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p + n \geq 2$

$\neg P$: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p + n < 2$

Soit $p \in \mathbb{N}$:

on pose $n = 2$ $\quad p + 2 \geq 2$

P est donc vraie

$\varphi : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1.$

$\neg \varphi : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 1$

on prend $\neg\varphi$

soit $y \in \mathbb{R}$.

on pose $x = 1$;

$1^2 + y^2 \geqslant 1$ donc $\neg\varphi$ est vraie

Alors φ est fausse.

TD 01 (Exo 1)

$A : \exists n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{N}, P < n$

$\neg A : \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P \geqslant n$

on démontre A :

Soit $P \in \mathbb{N}$,

on pose $n = 0$ alors $0 > P$ ce qui est impossible

Alors A est fausse donc $\neg A$ est vraie

$C : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta^2 < \varepsilon$

$\neg C : \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \delta^2 \geqslant \varepsilon$

on demontre $\neg B$:

Soit $\varepsilon > 0$;

on a $\delta^2 < \varepsilon \iff \delta < \sqrt{\varepsilon}$

on pose : $\delta = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$

$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} < \sqrt{\varepsilon}$ Vraie donc B est vraie $\neg B$ fausse

$B / \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P \leqslant n$

$\neg B / \exists n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{N}, P > n$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

on pose $P = n+1$

$n+1 \leqslant n$ fausse donc B est fausse et $\neg B$ est vraie.

D/ $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \delta^2 < \varepsilon$

$\neg D$/ $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \delta^2 \geqslant \varepsilon$

on démontre D :

Soit $\varepsilon > 0$

on a : $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

on pose $\delta = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} < \sqrt{\varepsilon}$$ D est vraie

$\neg D$ est fausse

Exercice 5 :

$\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ un naturel est de la forme $\{0; 1; 2; 3\}$

un naturel est un entier ou est incrémenté

$\frac{1}{3}$ est une fraction donc c'est faux

Contrôle continu 1 : 2023

Exercice 1 :

P : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $(n^2 \geq 1)$

soit $n \in \mathbb{Z}$;

Si $n \geq 1$ ou $n \leq 1$, Alors $n^2 \geq 1$

Sinon $n < 1$ et $n > -1$ donc $n = 0$

donc $n \leq 0$ vraie alors P est vraie

Q : $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x > \Gamma)$ et $(x^2 < 2)$

on pose $x > \Gamma \Leftrightarrow x^2 > 2\Gamma$

$x^2 > 2\Gamma$ et $x^2 < 2$

$2 > x^2 > 2\Gamma$ impossible donc Q

est fausse.

Exercice 2 :

A/

P	Q	P ou Q	P et Q	$\neg(P \text{ et } Q)$
V	V	V	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

B/

$\neg P$	P	Q	$\neg Q$	P et $\neg Q$	$\neg P$ et Q
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F
V	P	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F

Exercice 3 :

P : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{N}$, $P + n \geq 2$

$\neg P : \forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P + n < 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on pose $P = 2$ $\quad n + P < 2 \iff n + 2 < 2$

$n + 2 < 2$

donc c'est faux $\neg P$ est fausse, P est donc vraie.

$Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1$

$\neg Q : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 1$

Démontrons Q :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

on pose $y = 1$ $\quad$ on a donc $x^2 + 1 < 1$

Si $x > 0$ c'est faux

donc Q est fausse et $\neg Q$ est donc vraie.

Exercice 4 :

$\forall n \geq 2$

$x > 0 \Rightarrow (1 + x)^n > 1 + nx$

Initialisation :

au Rang 2 :

$x > 0 \Rightarrow 1^2 + x^2 + 2x > 1 + 2x$

$x > 0 \Rightarrow 1^2 + x > 1$

$x > 0 \Rightarrow x > 0$

Au Rang $n + 1$:

$(1 + x)^n > 1 + nx$

$$(1+x)^n \times (1+x) \geq 1 + nx$$

$$(1+x) \geq 0$$

Exercice 1 :

$P : n \in \mathbb{Z}, (n^2 \leq 4)$ ou $(n > 2)$

Soit $n \in \mathbb{Z}$;

Si $n^2 \leq 4$ alors $n \leq 2$ donc :

$$n \leq 2 \text{ ou } n > 2$$

Pour $n = -4$

$n^2 = 16 \quad 16 \leq 4 \quad -4 > 2$

faux

donc P est fausse.

$Q : \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x > y)$ et $x^2 + y^2 < 1$

$y = 0$

$x > 0$

$x^2 + 0^2 < 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 < 1 \quad \frac{1}{4} < 1$ Q est vraie

C C1(LSA)

23/10

Lundi

Fin d'après midi

Cours n°5 :

préparation au cc durant le cours du 18/10

Rappel sur les ensembles.

appartenance

$$2 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$$

inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$$

opération sur les ensembles :

$$\{0, 1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\{0, 1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\}$$

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$C_E \{0, 1, 2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ complémentaire

$\{0, 1, 2\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{0, 1\}$ différence

$\emptyset = \{ \}$ ensemble vide (Il n'y a pas d'ensembles contenant tous les ensembles)

Règles sur les opérations.
(Réunion intersection)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Produits :

$\{0, 1, 2\} \times \{2, 3, 4\}$ Cartésien.

$$= \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$

Ensembles des parties de $\{0, 1, 2\}$

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) \{\{\ \}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

ensembles $\{1, 2\} \neq (1, 2)$ couple

$(1, 2) \neq (2, 1)$ (couples)

$\{1, 2\} \neq \{2, 1\}$ (Ensembles)

Chapitre Fonctions et Application

Exemples :

$f(x) = 1$ $\begin{cases} \text{fct} \\ \text{application constante} \end{cases}$

$f(x) = x$ $\begin{cases} \text{fct} \\ \text{application identité} \end{cases}$

$f(x) = x^2$ $\begin{cases} \text{fct} \\ \text{application} \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonction n'est pas definie pour $x = 0$

Définition : E, F ensembles

- f <u>fonction</u> de E dans F :

  à chaque élement de E on associe au plus, un élement de F (0 ou 1)

- f est une <u>application</u> de E dans F

  à chaque élement de E on associe, un unique élement de F.

Une application est toujours une fonction.

Exemples :

Applications

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
$\quad x \to x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \to \frac{1}{x}$

fonction car $f(0)$ n'est pas définie.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{1}{x}$.

f tel quel n'est pas une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition : (suite)

$f : E \to F$ $\quad E$ = ensemble de départ
$\quad F$ = " " d'arrivée.

$f : x \to f(x) = y$ $\quad f(x)$ image de x par f
x antécédant de y

Graphe de f
$G_f = \{x, f(x)\} / x \in \mathrm{Def}\, f \} \subset E \times F$

$\mathrm{Def}\, f = \{x \in E / f(x) \text{ existe}\}$.

Définition "ensembliste" d'une fonction :

f : fonction E dans F : donnée d'un triplet (E, F, G)
$G \subset (E \times F)$

Pour tout $x \in E$ $\exists$ au plus $y \in F$ tel que $x, y \in G$

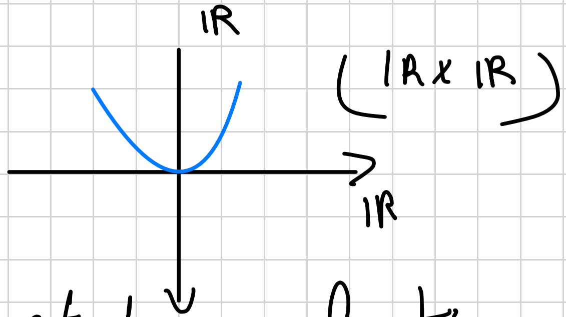
f : Application : (E, F, G)

$G \subset E \times F \quad \forall x \in E$, il existe un unique $y \in F$ tel que $x, y \in G$.

Exemples:

$f\,(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{x, x^2 / x \in \mathbb{R}\})$

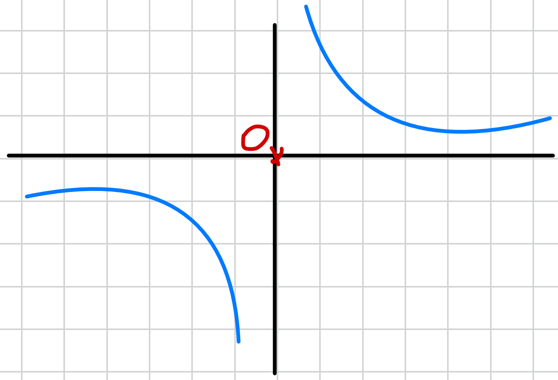
$f(x) = x^2$. $\quad$ Def $f = \mathbb{R}$.



f est un application et donc un fonction.

$g = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, \frac{1}{x}) / x \in \mathbb{R}^*\}$

Def $g = \mathbb{R}^*$

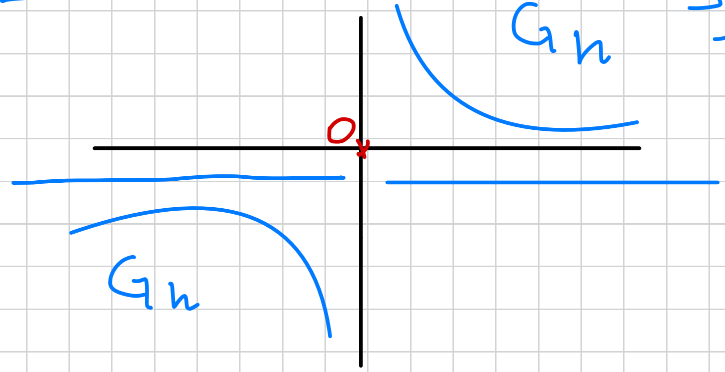


g fonction
mais pas une application car $g(0)$ n'est pas défini

3) $h = (\mathbb{R}^*, \mathbb{R}, \{x, \frac{1}{x} / x \in \mathbb{R}^*\}$

Def $h = \mathbb{R}^* \to \;]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Def f



4 application (et aussi fonction)

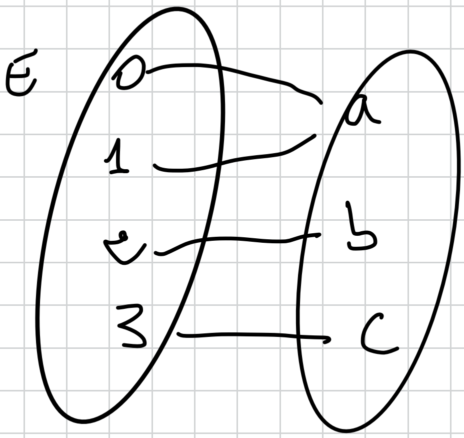
(on change l'ensemble de départ

Si $f = (E, F, G)$ fonction

Alors $g = (\mathrm{Def}\, f, F, G)$ application.

Notion avec les "patates" :

$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$

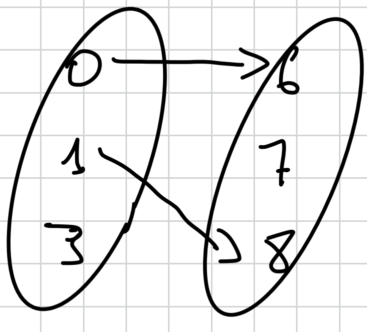


$f(0) = a$

$f(1) = a$

$f(2) = b$

$f(3) = c$



$(\{0, 1, 2\}, \{6, 7, 8\},$

$\{(0, 6), (0, 7), (1, 8)\}$

$G_f \in \{0, 1, 2\} \times \{6, 7, 8\}$

f n'est pas une fct car à 0 on associe 6 et 7.

Définitions : E, F ensembles.

f application $E \to F$

- **f injective :** si les images par f de 2 éléments sont distincts

$$\forall x_1, x_2 \in E, \ (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\forall x_1, x_2 \in E, \ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

- **f surjective :**

Si $\forall y \in F$, il existe (au moins un) $x \in y$

$$f(x) = y$$

- **f bijective :**

$\forall y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

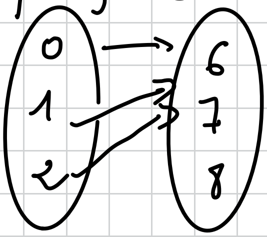
Prop (B bijective) $\Leftrightarrow$ (f inj et surj)

Exemples :

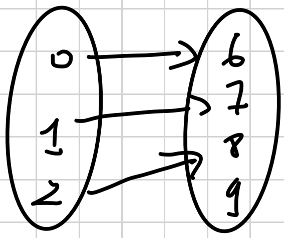
Car $f(0) = f(1) = 6$

~~Inj~~

~~Surj~~



Car 7 pas d'antécédent



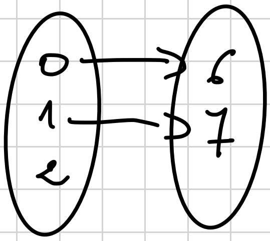
inj

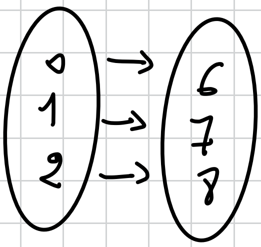
~~Surj~~

Car x n'existe pas $f(x) = 9$.

~~inj~~

surj





inj

surj

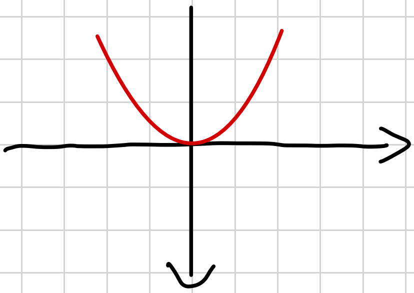
bij

1) $f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

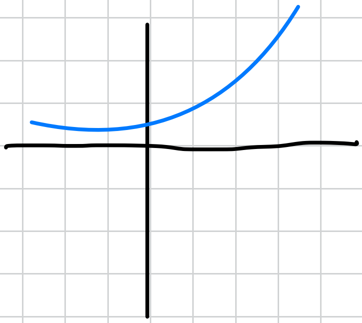
$f(x) = x^2$

ni inj $f(1) = f(-1)$



n surj car -2 n'a pas d'antécédent

2) $f(x) = e^x$



$f(x_1) = f(x_2)$

$e^{x_1} = e^{x_2}$

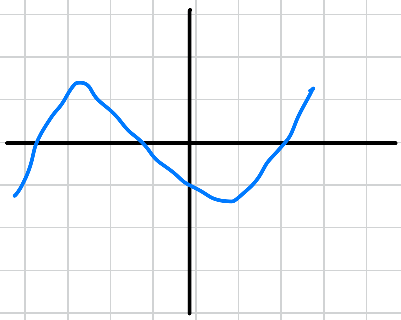
$\ln(e^{x_1}) = \ln(e^{x_2})$

$x_1 = x_2$.

f pas surjective par

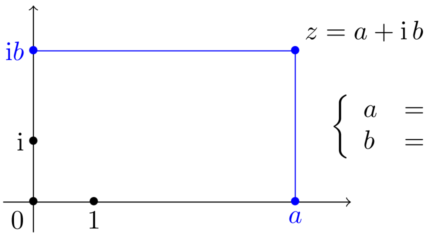
par exemple -2 pas d'antécédent

3) $f(x) = x^3 - x$



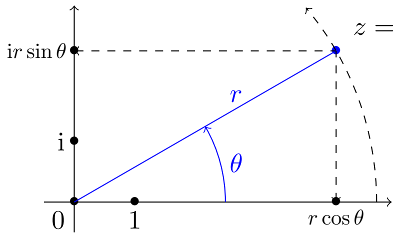
surj mais pas inj.

Fiche n° 3 - Exponentielle complexe



$$\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$$

Forme algébrique



$z = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta) = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$

$$\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Forme polaire et forme exponentielle

- Exponentielle complexe : $\begin{cases} e^{\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \\ e^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta}) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}) \end{cases}$

- Opérations : $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{-\mathrm{i}\theta'}$, $\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$,
  $(r\,e^{\mathrm{i}\theta}) \times (r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}) = (r\,r')\,e^{i(\theta+\theta')}$, $(r\,e^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\,e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{1}{r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{1}{r'}\,e^{-\mathrm{i}\theta'}$, $\frac{r\,e^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$

$\cos\theta =$

- Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité : On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. Les solutions de l'équation $X^n = 1$ sont exactement l'ensemble : $\mathbb{U}_n = \left\{1, z, z^2, \dots, z^{n-1}\right\} = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \;\middle|\; k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$.

$\sqrt{2}$

Exercice 1. (a) Donner la forme polaire et exponentielle des nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}3$.
En déduire $z_1\,z_2$, z_1/z_2, z_1^3.
(b) Donner la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 = 2\,(\cos(5\pi/6) + \mathrm{i}\sin(5\pi/6))$ et $z_2 = 3e^{-3\mathrm{i}\pi/4}$.
En déduire $\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)$ et $\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2)$.

Exercice 2. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $\left(\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})\right)^3$ et en déduire $\cos^3\theta$ en fonction d'une somme de fonctions $\cos(k\,\theta)$ et/ou $\sin(k\,\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^3$ et en déduire une expression de $\cos(3\,\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.

Exercice 3. (a) On pose $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Calculer j^k et $(\bar{j})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. En déduire la valeur de j^k et $(\bar{j})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
(b) Calculer i^k et $(\bar{\mathrm{i}})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire la valeur de i^k et $(\bar{\mathrm{i}})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
(c) On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Calculer z^k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. En déduire la valeur de z^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_6 = \{z^k \,|\, 0 \le k \le 5\}$. Placer les éléments de $\mathbb{U}_6$ dans le plan complexe.

Table 1: Tables de multiplication de $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$

$\times$	1	j	j^2
1			
j			
j^2			

$\times$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$
1				
i				
-1				
$-\mathrm{i}$				

$\times$	1	z	z^2	z^3	z^4	z^5
1						
z						
z^2						
z^3						
z^4						
z^5						

Exercice 4. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que : $e^{\mathrm{i}\,\theta} + 1 = 2\,e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\theta}\cos(\theta/2)$ et $e^{\mathrm{i}\,\theta} - 1 = 2\,\mathrm{i}\,e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\theta}\sin(\theta/2)$.
(b) Pour z nombre complexe, $z \neq 1$ et n entier natuel, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
(c) Pour $\theta \neq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en déduire une valeur explicite simple des sommes : $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.

TD 03 :

Exercice 1. (a) Donner la forme polaire et exponentielle des nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}3$. En déduire $z_1\, z_2$, z_1/z_2, z_1^3.
(b) Donner la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 = 2\,(\cos(5\pi/6) + \mathrm{i}\sin(5\pi/6))$ et $z_2 = 3e^{-3\mathrm{i}\pi/4}$. En déduire $\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)$ et $\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2)$.

a)

$z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i3$

$|z| = \sqrt{2}$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

forme exponentielle de :

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}.$$

$$z_2 = \sqrt{3} - 3i$$

$$|z| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \cos\frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$$

$$\sin\frac{b}{|z|} = \frac{-3}{\sqrt{12}}$$

$\tan\theta = \left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad z_2 = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3^2)}$$

$$\sqrt{3+9} = \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\, i\right)$$

$$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\, i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)$$

$$z_1 \times z_2 = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}} \times 2\sqrt{3}\, e^{-i\pi/3}$$

$$2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 \times z_2 = (1 - i)(\sqrt{3} - 3i)$$

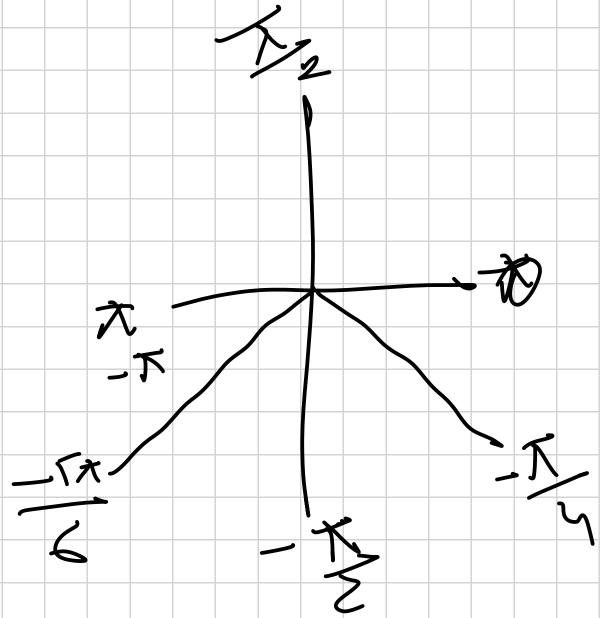
$$\cancel{\sqrt{3}} - 3i - \cancel{\sqrt{3}} - 3$$

$$-3i - 3$$

$$z' = -3 - 3i$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\sqrt{18}\, e^{-\frac{5\pi}{6}}$$



$$z_1/z_2 = \frac{(1-i)\times(\sqrt{3}+3i)}{(\sqrt{3}-3i)\times(\sqrt{3}+3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3i-3i}{-6}$$

$$= \frac{3i+3}{-6} = \frac{3i+3}{-6} = \frac{3}{12}i + \frac{3}{12}.$$

$$\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}$$

$$z_1^3 = (1-i)^3$$

$$= (1^2 - i^2 - 2i)(1-i)$$

$$(1+1-2i)(1-i)$$

$$(2-2i)(1-i)$$

$$2-2i-2i+2i^2$$

$$2-4i-2$$

$$\boxed{-4i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{6}e^{-i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{6}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} \\ z_1 z_2 &= 2\sqrt{6}\,e^{-i\frac{7\pi}{12}}. \end{aligned}}$$

b)

$$z_1 = 2\left(\cos\left(5\pi/6\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$z_2 = 3e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i$$

z_2

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{ix} = 3\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$$

$$e^{ix} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + -i\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$$

$$z_2 = e^{ix} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{i3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = -\sqrt{3} + \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 2. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $\left(\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right)^3$ et en déduire $\cos^3\theta$ en fonction d'une somme de fonctions $\cos(k\,\theta)$ et/ou $\sin(k\,\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ et en déduire une expression de $\cos(3\,\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.

Exercice 2 :

a) $\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^3$

$(a+b)^2(a+b)$

$\left(\frac{1}{8}\left(\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}\right)\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)\right)$

$\left(\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{2i\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)\right)$

$\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i\theta 3}\right)$

$\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i\theta 3}}{2}\right)$

$\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{3i\theta}}{2}+\frac{3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos(3\theta)+\frac{3}{4}\cos\theta$

b) $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$ déduire $\cos(3\theta)$

selon la formule de Moivre :

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

donc pour $n=3$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$.

$\cos(3\theta)$ = partie réelle

$\sin(3\theta)$ = partie Imaginaire

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\overbrace{\cos\theta}^{a} + \overbrace{i\sin\theta}^{b})^3$$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3.$$

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta.$$

$$\boxed{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta} + i\boxed{(3\cos^2\theta - \sin^3\theta)}.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires

on a: $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta - \sin^3\theta.$

$$\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)^3$$

$$(a+b)^3 = (a^2 + b^2 + 2ab)(a+b)$$

$$a^3 + a^2b + b^2a + b^3 + 2a^2b + 2ab^2$$

$$a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$$

$$\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3e^{3i\theta} \times e^{-i\theta} + 3^{-3i\theta} \times e^{i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(\underbrace{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}_{c}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\cos(3\theta) + 3\cos\theta\right).$$

Cours logique
Structure Algébrique
CM 06 - 2023/10/11

Composition de fonctions

Définition : E, F, G 3 ensembles.

$E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$ deux applications
la composée de g et f. notée $g \circ f$ (g "rond" f)
est l'application $E \to G$ et qui a x associe
$g(f(x))$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$
$$x \to f(x) \longmapsto g(f(x))$$
$$x \longrightarrow g(f(x))$$

donc on peut écrire $\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$

Exemple :

1) $f(x) \to 2x$, $g(y) = e^y$.

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{déf}}{=} g(f(x)) = g(2x) = e^{2x}.$$

[Autre Calcul :
$$(g \circ f)(x) = g(fx) = g^{f(x)} = e^{2x}$$]

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g\ \exp} \mathbb{R}$$
$$x \to 2x \xrightarrow{y} e^y$$

$$x \to 2x \to e^{2x}.$$

2) $f(x) = 2x+1$ $\quad g(y) = 3y+2$

$$(g\circ f)(x) \overset{\text{déf}}{=} g(f(x)) = g(2x+1) = 3(2x+1)+2$$
$$= 6x+5.$$

⚠ calcul faux :

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1)$$
$$= 3\times 2x + 1 + 2 = 6x+3.$$

$$(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f(3y+2) = 2(3y+2)+1$$
$$= 6y+5.$$

Ici c'est une coïncidence

$g\circ f = f\circ g$ en général $g\circ f \neq f\circ g$.

3) $f(x) = 2x+1$, $g(y) = 3y$. $\quad G_f = \{(x, 2x+1) / x \in \mathbb{R}\}$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 3\times(2x+1)$$
$$= 6x+3.$$

$$f\circ g(y) = f(g(x)) = f(3y)$$
$$= 2(3y)+1 = 6y+1$$

$$g\circ f \neq f\circ g.$$

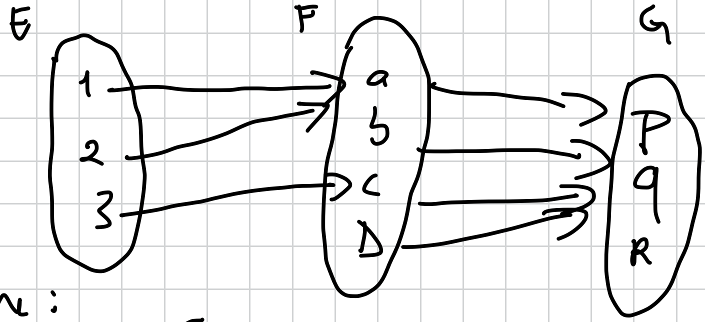
Exercice

$f(x) = ax+b$, $\quad g(y) = cy+d$

à quelle condition $f\circ g = g\circ f$

(fonction affine)

4)

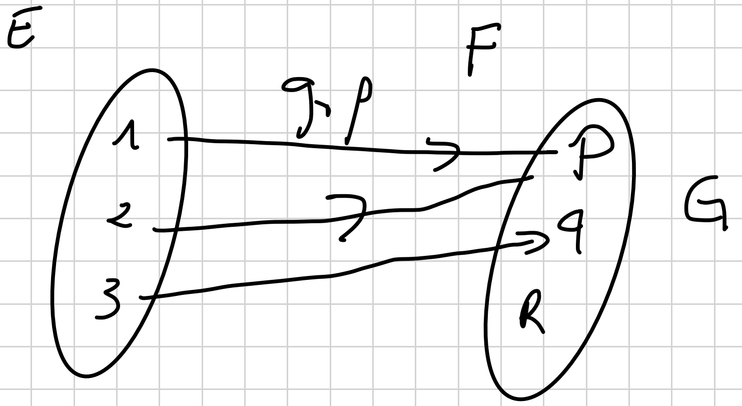


Graphe :

$G_f = \{(1,a),(2,a),(3,c)\}$. 1 et 2 ont la même image pas injective

Pas surjectif b et b pas d'antécédant

$G_g = \{(a,P),(b,P),(c,q),(d,q)\}$



$G_{g\circ f} = \{(1,P),(2,P),(3,q)\}$.

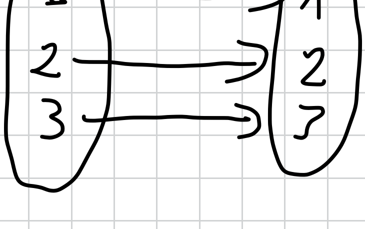
Notation - Définition :

Si E ensemble non vide, on note IdE, l'application identité.

$$E \xrightarrow{IdE} E$$
$$x \longrightarrow x$$

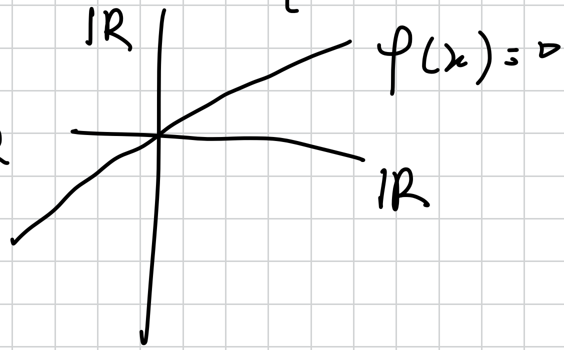
$\forall x \in E, \ Id_E(x) = x$

$E = \{1,2,3\}$



$G_{IdE} = \{(1,1),(2,2),(2,3)\}$

$f = Id_{\mathbb{R}}$



$Id_E : \forall z \in \mathbb{C},\ Id_{\mathbb{C}}(z) = z$

$Id_{\mathbb{N}},\ Id_{\mathbb{Z}} \qquad Id_{\mathbb{N}} \neq Id_{\mathbb{Z}}$

Propriété :

$E \xrightarrow{f} F$

alors $(Id_F \circ f) = f$

$f \circ Id_E) = f)$

$x \in E$

$(Id_F \circ f)(x) = Id_F(f(x))$

$= f(x)$

$(f \circ Id_E)(x) = f(\underbrace{Id_E(x)}_{=x}) = f(x)$

Fonction réciproque :

Si $f : E \to E$ bijective.

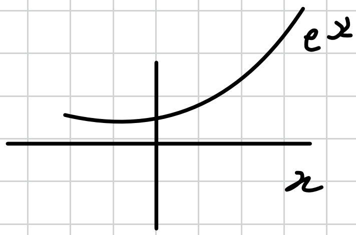
on note f^{-1} l'application

$f^{-1} : F \to E.\quad y \to$ l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

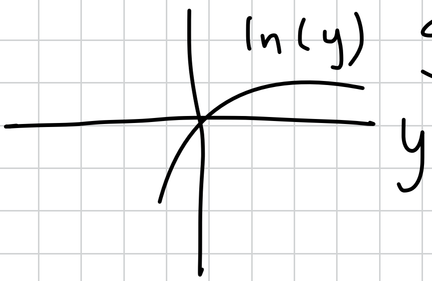
$$\boxed{\text{on a alors } f \circ f^{-1} = Id_E \qquad f^{-1} \circ f = Id_E.}$$

Exemple 1 : $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$x \mapsto e^x$



$y = e^x \iff x \iff \ln(x)$



$g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$y = \ln y$

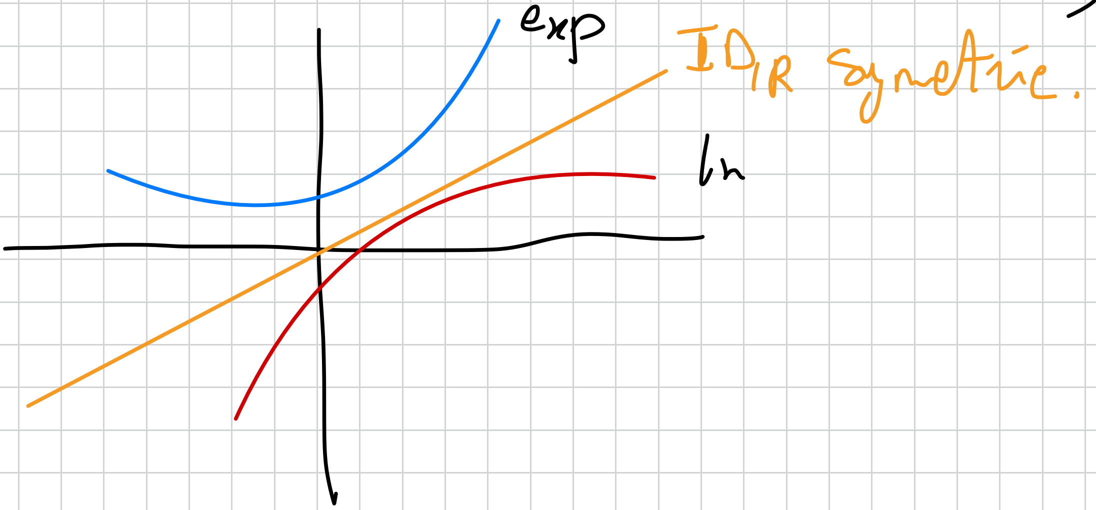
on a $\exp^{-1} = \ln$ on a aussi $\ln^{-1} = \exp$

$G_{\exp} = \{(x, e^x) / x \in \mathbb{R}\}$

$G_{\ln} = \{(y, \ln y) / y \in]0, \infty[\}$.

Si $y = e^x$ alors $(y, \ln y)$

$= (e^x, \ln(e^x)) = (e^x, x)$



Exemple 2 :

$f(x) = 2x + 3$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Montrons f bijective.
et determinons f^{-1}

$$[\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)]$$

Soit $y \in D$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = 2x + 3 \\ &\iff 2x = y - 3 \\ &\iff x = \frac{1}{2} y - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} y - \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+3) &= \frac{1}{2}(2x+3) - \frac{3}{2} \\ &= x + 1{,}5 - \frac{3}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} = f(f^{-1} y) = f\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \\ = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) + 3 = y. \end{aligned}$$

Dém de $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$$
$$= Id_E(x)$$

$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(y)) = f^{-1}(x) = Id_F(y).$$

Si $f : E \to F$ bijective.

fonction réciproque : $f^{-1} : F \to E$

$$x = f(y) = y = f(x).$$

$\forall (x, y) \, (E \times F)$

$f \; E \to \mathbb{C}$, $f(x) \neq 0$ $\forall x \in E$.

fonction inverse :

$$\frac{1}{f} : E \to \mathbb{C}$$
$$x \to \frac{1}{f(x)}$$

	fonction	Réciproque	inverse
	$f(x) = x$	x	$\frac{1}{x}$
$x \; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	$f(x) = x^2$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x^2}$
	$f(x) = e^x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{e^x}$

Image directes,

Image réciproques.

f application $E \to F$

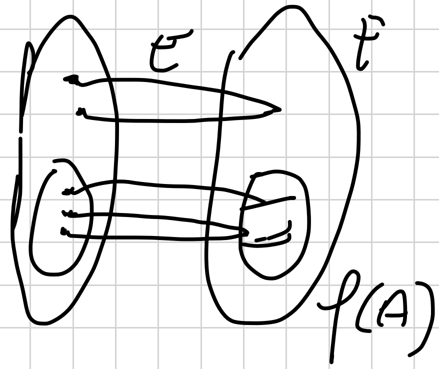
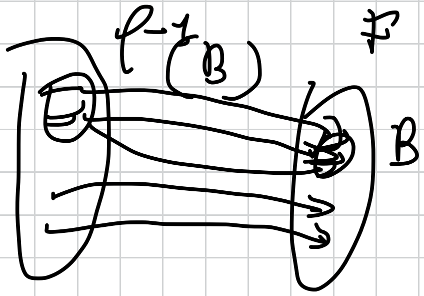


image directe :

$$A \subset E, \quad f(A) = \{ (f(x)) \,/\, x \in A \}.$$

Image réciproque

$$B \subset F \quad f^{-1}(B) \{ x \in A \,/\, f(x) \in B \}$$



Fiche nombres complexes.

Rappel : le Corps d'un nbr Complexe $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

avec $i^2 = -1$

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, u et v des nbres complexes.
et $n \in \mathbb{Z}$:

- Addition : $a + ib + a' + ib' = a + a' + ib + ib'$
$= (a + a') + i(b + b')$
- Multiplication : $z \times z'$
$$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + ib'a + iba' - bb'$$
$$= (aa' - bb') + i(b'a + a'b)$$
- Parties réelles et imaginaires :
$Re_z = a \quad Re_{z'} = a'$
$Im_z = b \quad Im_{z'} = b'$
donc $z = Re_z + i Im_z$] pareil pour z'

Conjugué :

$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib \qquad z' = a' + ib' \quad \bar{z'} = a' - ib'$

$\overline{(\bar{z})} = z$.

Module :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \; (= |\bar{z}|) \qquad |z| = \sqrt{z \times \bar{z}}.$$

Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{\bar{z}}{|z|}$

Forme algebrique : $z = a + ib$. avec b et $c \in \mathbb{R}$.

Forme polaire (Forme Trigonometrique) : $z = P(\cos\theta + i\sin\theta)$
$P \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

$P = |z|$ est le module et θ est argument de z.

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

(a) Proposition P : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $(n^2 \geq 1)$

(b) Proposition Q : Il existe $x \in \mathbb{R}$, $(x > 5)$ et $(x^2 < 2)$

P : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $n^2 \geq 1$

Soit $n \in \mathbb{Z}$;

$n \geq \sqrt{1}$

$n \geq 1$

ni $n \leq 0$

$n \geq 1$

$n \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

p est : Vraie

Q : $x \in \mathbb{R}$ $x > 5$ et $x^2 < 2$

$x > 5$ et $x < \sqrt{2}$.

$x^2 > 25$ et $x^2 < 2$

$2 < x^2 > 25$

$25 < x^2 < 2$ donc Q est fausse.

x^2 ne peut pas être inferieur a 2 pendant qu'il est superieur à 25 par x^2 est une fct croissante.

Exercice 2. On considère des propositions P et Q de valeurs de vérité quelconques.

(a) Ecrire la table de vérité de la proposition A : (P ou Q) et $\neg$(P et Q)

(b) Ecrire la table de vérité de la proposition B: (P et $\neg Q$) ou ($\neg P$ et Q)

(c) Comparer les propositions A et B. Que peut-on en déduire?

a)

P	$\neg P$	Q	$\neg Q$	$\overbrace{P \text{ ou } Q}^{S}$	P et Q	$\overbrace{\neg(P \text{ et } Q)}^{V}$	A $\overbrace{S \text{ et } V}$
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F

b)

$\overbrace{P \text{ et } \neg Q}^{S}$	$\overbrace{\neg P \text{ et } Q}^{V}$	B $\overbrace{S \text{ et } V}$
F	F	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

c) A et B ont la même table de vérité.
et $\neg(P \text{ et } Q) = A = B$.

Exercice 3. Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse.

(a) Proposition $P : \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p + n \geq 2$

(b) Proposition $Q : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 1$

$P : \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, p + n \geq 2$

$\neg P : \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p + n < 2.$

$\rightarrow \forall p \in \mathbb{N},$

on prend $n = 2$

$$n + p \geq 2$$

$$2 + p \geq 2$$

C'est vrai P est vraie.

$Q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1$

$\neg Q : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 1$

$\rightarrow \forall y \in \mathbb{R};$

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

Vrai car x^2 est croissante et y^2 est croissant

donc tout le temps positif.

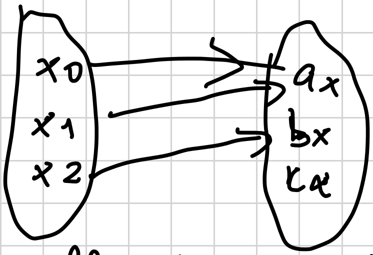
$\neg Q$ est vrai Q est fausse. Si $x = 1$

$$1^2 + y^2 \geq 1$$

L1 IEEEA CM7

Images directs et réciproques

Application $f : E \to F$ est définie par la donnée d'un élément $y \in F$, unique pour chaque élément x de E on note $y = f(x)$



$f(0) = a$ $\quad$ $f(2) = b$

$f(1) = a$

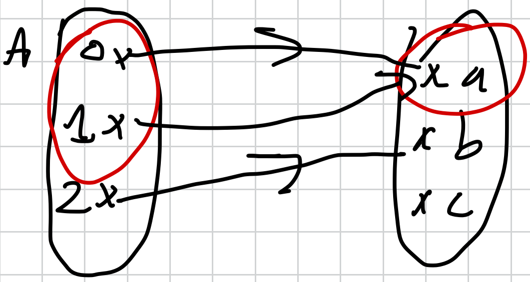
- a est appellée image de 0 par f.
- 0 et 1 sont des antécédents de a par f.

f est définie par (E, F, G) ensemble de départ, ensemble d'arrivée et le graphe de f.

$$G_f = \{ (0,a), (1,a), (2,b) \} \quad (\subset E \times F).$$

Définition: Image directe

$$A \subset E \quad f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$$

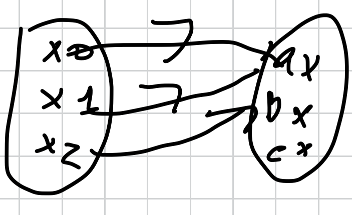


$$f(A) = \{ f(0), f(1) \} = \{ a \}$$

<u>Image réciproque:</u>

$$B \subset F \qquad f^{-1}(B) = \{ x \in E \,/\, f(x) \in B \}$$

$$f^{-1}(B) = \{ 0, 1 \}$$



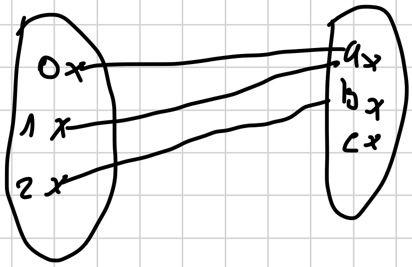
$$B = \{ a, c \}$$

Remarque : ne pas confondre $\underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{image réciproque}}$ avec $\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{\text{élément pour } G \in F}$

$f^{-1}(B) \subset E$

f peut être bijective ou pas

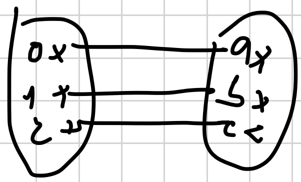
valable que pour f bijective.



$f^{-1}\{a, c\}$

f^{-1} n'est pas définie

Cas d'une fonction bijective :

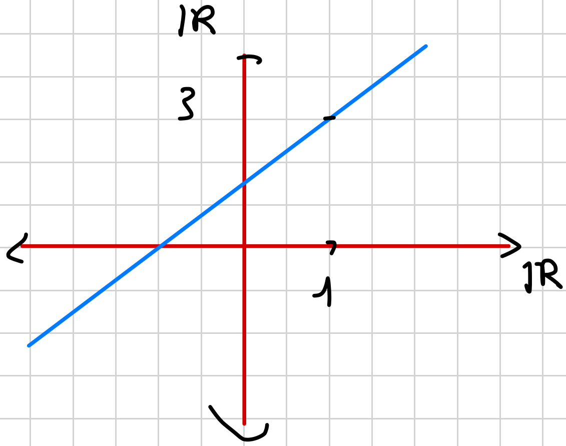


$f^{-1}(\{b\}) = \{1\}$ $\quad$ $f^{-1}(b) = 1$

$f^{-1}\{a, b\} = \{0, 1\}$.

Exemple :

$f(x) = 2x + 1$



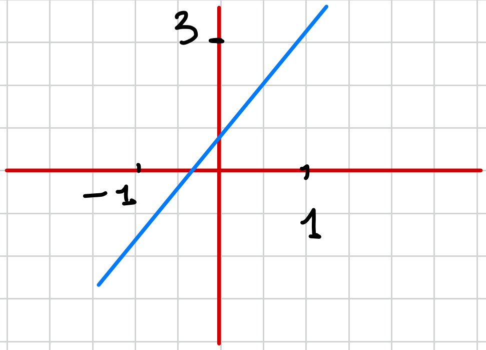
$f(-1) = -1$

$f(1) = 3$

$f^{-1}(-1) = -1$ $\quad$ $f^{-1}(3) = 1$

$f([-1,1])$

$f^{-1}([0,2])$



$$y \in f([-1,1]) \Leftrightarrow \exists x \in [-1,1],\ f(x)=y$$

$$y = 2x+1 \Leftrightarrow 2x = y-1$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$y \in f([-1,1]) \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}y \leq \frac{3}{2}$$

$$-1 \leq y \leq 3$$

$$f([-1,1]) = [-1,3]$$

$y \in [0,2]$ alors $y = 2x+1$ avec

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$0 \leq 2x+1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

donc $f^{-1}([0,2]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Proposition : I, J intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $f : I \to J$ bijective

f continue et strictement croissante.

$$\forall x, y \in I,\ x > x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

alors si $a \leq b \in I$, $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

si $c \leq d \in J$, alors $f^{-1}([c,d]) = [f^{-1}(c), f^{-1}(d)]$

$f(x) = x^2$ $\quad f([-2,2]) = [0,4]$ $\quad f^{-1}([-1,1]) = [-1,1]$

$f^{-1}([-2,1]) = \emptyset$

Exercice 2 :

a)

(P) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P^2 > n$ Vraie

(7P) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{N}, P^2 \leqslant n$ fausse

on va supposer que P est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on pose $P = n$, $P^2 = n^2$

ce qui implique que $P^2 > n \Rightarrow n^2 > n$

ce qui est vraie.

b)

(φ) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \sqrt{\delta} > \varepsilon$ fausse.

(7φ) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \sqrt{\delta} \leq \varepsilon$ Vraie

on suppose que (7φ) est vraie

Soit $\varepsilon > 0$;

On a $\sqrt{\delta} \leqslant \varepsilon$ est donc $\delta \leqslant \varepsilon^2$

on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{2}$

$\dfrac{\varepsilon^2}{2} \leqslant \varepsilon^2$ donc 7φ est vraie

Exercice 4 :

$$U_0 = 0 \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

$$U_n = 2^n - 1$$

Initialisation :

pour $n = 0$ $\quad U_0 = 2^0 - 1$

$U_0 = 1 - 1 = 0$

Heredité : $\quad U_n = 2^n - 1$

$U_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$

$U_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$

$U_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Exercice 5 :

Initialisation :

$P_2 = 0 \qquad 2 \times 0 + 1 = 1$

$n = 0 \quad (0+1)^2 = 1^2 = 1$

donc c'est vérifié

Heredité :

Exercice 7 :

$$z = -2 + 4i \qquad z' = 2 + 3i$$

$$\bar{z} = -2 - 4i \qquad Re(z) = -2 \qquad Im(z) = -4$$

$$|z| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$z + z' = 7i$$

$$zz' = (-2+4i)(2+3i) = -4 - 6i + 8i - 12$$
$$= -4 + 2i - 12$$
$$= -16 + 2i.$$

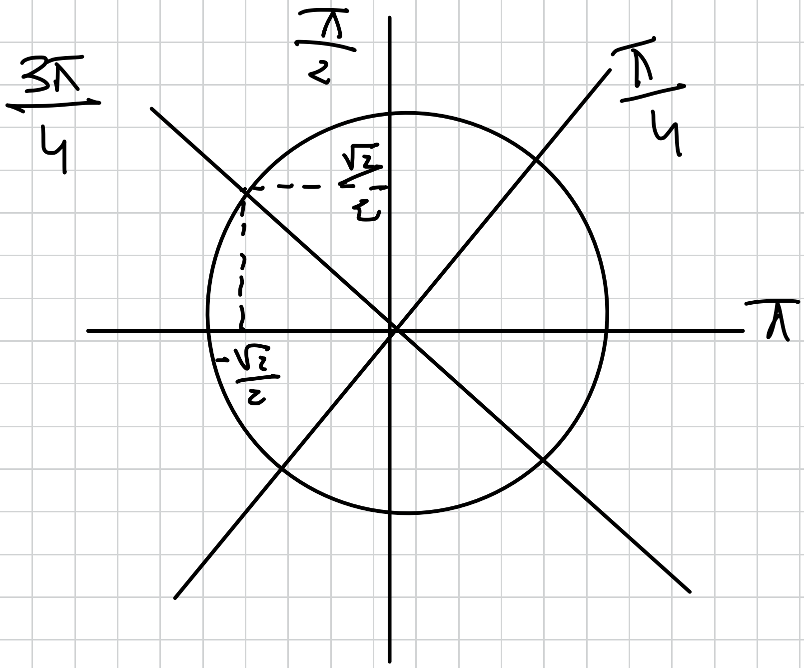
$$\frac{z}{z'} = \frac{(-2+4i)\times(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-4+6i+8i+12}{13}$$
$$= \frac{8+14i}{13}$$
$$= \frac{8}{13} + \frac{14}{13}i$$

Exercice 8 :

$$-3 + 3i$$

$$|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{z}{|z|} = \frac{-3+3i}{3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3}(-1+i)}{\cancel{3}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$



b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $z = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi 3}{4}}$.

$z^8 = (3\sqrt{2})^8\, e^{i\frac{\pi 3}{4}\times 8}$

$z^8 = (3^8 \times \sqrt{2}^8)\, e^{i6\pi}$.

Exercice 9:

1) L'ensemble $A = E \cap \mathbb{Z}^* = \{-5, -3, 1, 2\}$

2) $B = E \cap \mathbb{Q}^+ = \{0, 1, 2, \frac{5}{2}\}$

3) $C = E \cap]0, +\infty[= \{1, 2, \frac{5}{2}, \sqrt{7},\}$

4) $A \cap B = \{1, 2\}$

5) $A \cup B = \{-5, -3, 0, \frac{5}{2}, 1, 2\}$

9) $A \cup C =$ A ou C

CC1 prép 2022

Exercice 1 :

P : $\forall n \in \mathbb{Z},\ n^2 \geq 4$ ou $n > 2$

$n^2 \geq 4$ ou $n > 2$

On pose : $n = 1$ $\quad 1^2 \geq 4$ fausse et $1 > 2$ fausse

P est fausse.

Q : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$

On pose $x = 0$ et $y = \frac{1}{2}$

$0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 < 1$

$\frac{1}{4} < 1$ Vraie

$100^n - 1 = 99 \times k$

$100^n = 99k + 1$

$100^{n+1} = 100^n \times 100 - 1$

$= (99k + 1) \times 100$

Vrai car $100 \times 99k + 99 = 99(100k + 1)$

Donc c'est vrai

Exercice 3 :

$(P) : \forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}, p+q < 2.$

$(\neg P) : \exists p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}, p+q \geq 2.$

Soit $q \in \mathbb{N}$;

on pose : $p = 2$ $\quad p+q \geq 2$

$2+q \geq 2$ $\neg P$ est vraie

P est donc fausse

(Q) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 1$

$(\neg Q)$ $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq 1.$

Q est fausse

Soit $x \in \mathbb{R}^*$;

on pose $y = \frac{2}{x}$

$x \times y > 1$ $\quad \cancel{x} \times \frac{2}{\cancel{x}} > 1$

$2 > 1$ vrai. Q est vraie

P	Q	$\overbrace{P \text{ ou } Q}^{a}$	$\neg P$	Q	$\overbrace{\neg P \text{ ou } Q}^{b}$	a et b
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F

$z = e^{i\pi/3}$

z^k ; $z^0 = 1$ $\quad z^1 = z$ $\quad z^2 = e^{2i\frac{\pi}{3}} = j$

$z^3 = e^{i\pi} = -1$ $\quad z^4 = -1 \times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z^5 = e^{i\frac{\pi}{3}5} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \bar{z} = -\bar{j} = -e^{i\frac{\pi}{3}} = \bar{j}.$

$z^6 = (-1)^2 = 1.$

$z^{6k} = 1$ $\qquad z^{6k+5} = \bar{j}$

$z^{6k+1} = z$

$z^{6k+2} = j$

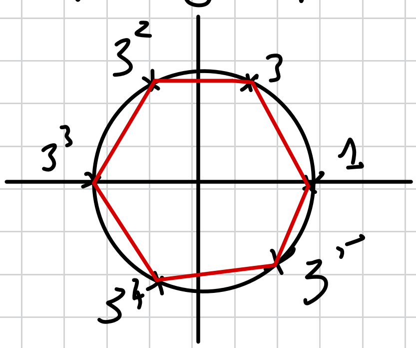
$z^{6k+3} = -1$

$z^{6k+4} = \bar{j}$

1	z	z^2	z^3	z^4	z^5
z	z^2	z^3	z^4	z^5	1
z^2	z^3	z^4	z^5	1	z^5
z^3	z^4	z^5	1	z	z^2
z^4	z^5	1	z	z^2	z^3
z^5	1	z	z^2	z^3	z^4

$U_6 = \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^5\}$

et un groupe cyclique



Exercice 1 :

$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

entiers naturels $\{0, 1, \dots\}$

entier relatif $\{-1, -2, 3, 0, 1\}$

nombre rationels sous la forme $\left(\frac{p}{q}\right)$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

ensemble de tous les nombres

TD 01

Exercice 1 :

(a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{N}, P \leq n$

($\neg$a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P > n$

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on pose $P = n+1$ $\quad n+1 > n$

$P > n$ vraie donc (a) fausse

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P \in \mathbb{N}, P \leq n$

($\neg$b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{N}, P > n$

Soit $n \in \mathbb{N}$;

on pose $P = n-1$ $\quad n-1 \leq n$

ou $P = n$ $\quad P \leq n$. b vraie.

$n = n$.

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta^2 < \varepsilon$

($\neg$c) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \delta^2 \geq \varepsilon$ fausse

Soit $\varepsilon > 0$;

on pose $\delta^2 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ vraie

(d) $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \delta^2 < \varepsilon$

($\neg$d) $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \delta^2 \geq \varepsilon$

Soit $\delta > 0$;

on pose $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$ $\quad \delta^2 \geq \frac{\delta^2}{2}$ vraie. $\neg$d est vraie

d est fausse

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

Initialisation : pour le rang $n=0$.

pour $n=0$: $(n+1)^2 = 1^2 = 1$.

$n=0$ $k=0$: $(2\times0+1) = 1$. Vrai au rang 0.

Hérédité :

au rang $(n+1)$.

$$\overbrace{1+3+5+7 \cdots + (n)}^{\sum_{k=0}^{n}} + (n+1)$$

$$1+3+5+7+ \cdots + (2k+1) + (2k+2)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} + (n+1) = \left((n+1)+(n+1)\right)^2$$

$$(n+2)^2 = \left((n+1)+1\right)^2$$

$U_0 = 0$

$U_{n+1} = 2U_n + 1$

0 $\underline{0}$

1 $2-1=\underline{1}$

2 $\underline{3}$

3 $\underline{7}$

4 $\underline{15}$

$U_n = 2^n - 1$

$U_0 = 1 - 1 = 0$

$U_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$U_{n+1} = 2^n \times 2 - 1$

$U_{n+1} = 2^n + 2^n - 1$

$U_{n+1} = 2^n + U_n$

$U_{n+1} = 2U_n + 1$

$= 2(2^n - 1) + 1$

$=$

$$2(2^n - 1) + 1$$

$$2 \times 2^n - 2 + 1 = \boxed{2^{n+1} - 1}$$ Vraie pour $(n+1)$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = (n+1)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} + (2n) = ((n+1)+1)^2$$

Fiche n°4 :

Exercice 5. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

(a) Montrer les égalités suivantes :

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \qquad \text{et} \qquad \complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B).$$

(b) En déduire :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{et} \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

(a) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$.

on raisonne par double inclusion.

inclusion

Montrons que $C_E(A \cap B) \subset (C_E A) \cup (C_E B)$.

soit $x \in C_E(A \cap B)$.

$$x \in E \quad x \notin (A \cap B).$$

donc $x \notin A$ ou $x \notin B$.

$$x \in E \text{ et } x \notin A$$

ou

$$x \in E \text{ et } x \notin B.$$

donc $x \in C_E A$ ou $x \in C_E B$.

$$x \in (C_E A) \cup (C_E B).$$

$$C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$$

$\Longleftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B)$

$\Longleftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \cup B$

$\Longleftrightarrow x \in C_E(A \cup B).$

(b) maison. (tip : $C \setminus A = (\complement_E A) \cap C$).

Exercice 6 :

1) Montrez que $(A_1 \cap A_2) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B)$

$(x \in A_1$ et $x \in A_2)$ ou B

$\Leftrightarrow x \in A_1$ ou B et $x \in A_2$ ou B

$\Leftrightarrow (x \in A_1 \cup B) \overset{et}{\cap} (x \in A_2 \cup B)$

$x \in (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B)$

(b) $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)$

Par récurrence :

Initialisation : au rang $n = 1$.

$\left(\bigcap_{k=1}^{1} A_k\right) \cup B = (A_1 \cup B)$

$\bigcap_{k=1}^{1} (A_k \cup B) = (A_1 \cup B)$

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)$.

$\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n+1} (A_k \cup B)$

$\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) \cup B = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \cup B$

$\left[\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_n\right) \cup B\right] \cap (A_{n+1} \cup B)$

$$\Longleftrightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)\right) \cap (A_{n+1} \cup B)$$

$$\Longleftrightarrow \bigcap_{k=1}^{n+1} (A \cup B).$$

Exercice 7:

(a) $(A \cap C_E B) \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \not\subset B.$

$(\exists x,\ x \in A \text{ et } x \in C_E B) \neq \emptyset$

$(\exists x,\ x \in A \text{ et } x \in E \text{ et } x \notin B)$

Si $x \in A$ et $x \notin B$ alors

$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \in B$

$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x \notin B.$

$\Longleftrightarrow \exists x \in A,\ x \in C_E B$

$\Longleftrightarrow A \cap C_E B \neq \emptyset$

(b) $A \setminus B = A \Longleftrightarrow B \setminus A = B$

$x \in A$ et $x \notin B \Longleftrightarrow x \in B$ et $x \notin A.$

$A \cap B = \{\emptyset\} \Longleftrightarrow B \cap A = \{\emptyset\}.$

donc $A \Longleftrightarrow B.$

L1 IEEEA, 2023-2024 Université de Rouen-Normandie
Lundi 2 octobre 2023

Fiche n° 4 - Ensembles et propriétés

Propriétés sur les ensembles (A, B, C, $\cdots$ sont des ensembles) :

1. Inclusion : (a) $A \subset A$ (b) Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (c) Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$
2. Intersection et réunion : (a) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$ (b) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
(c) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (d) $(A \cup B = A) \iff (B \subset A)$ (e) $(A \cap B = A) \iff (A \subset B)$
3. (a) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Complémentaire. Pour $A, B \subset E$, on a : (a) $\complement_E \complement_E A = A$ (b) $(A \subset B) \iff (\complement_E B \subset \complement_E A)$
(c) $\complement_E (A \cap B) = \big(\complement_E A\big) \cup \big(\complement_E B\big)$ (d) $\complement_E (A \cup B) = \big(\complement_E A\big) \cap \big(\complement_E B\big)$

Exercice 1. Rappeler les inclusions entre les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Sont-elles strictes ? Justifier.

Exercice 2. On note $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres. Expliciter les ensembles suivants :

(a) L'ensemble A des chiffres pairs.

(b) L'ensemble B des chiffres divisibles par 3.

(c) L'ensemble C chiffres supérieurs ou égaux à 5.

(d) Les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_E A$, $\complement_E B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

(e) Les ensembles : $F = (A \cup B) \cap C$ et $G = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Vérifier l'égalité.

(f) Les ensembles : $H = \complement_E (A \cap B)$ et $K = \complement_E A \cup \complement_E B$. Vérifier l'égalité.

Exercice 3. Expliciter les ensembles suivants :

(a) L'ensemble A des nombres réels x tels que $x^2 > 36$.

(b) L'ensemble B des nombres complexes z tels que $\mathrm{Re}\,(z^2) \geq 0$.

Exercice 4. Soient les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [1, 5]$ et $B = [2, 7]$. Déterminer :
(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A \setminus B$ (d) $B \setminus A$ (e) $\mathbb{R} \setminus A$ (f) $\mathbb{R} \setminus B$ (g) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ (h) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$
Que remarque-t-on ?

Exercice 5. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

(a) Montrer les égalités suivantes :
$$\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \qquad \text{et} \qquad \complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B).$$

(b) En déduire :
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{et} \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 6. Soit E un ensemble, B une partie de E et $(A_n)_{n \geq 0}$ une famille de parties de E.

(a) Montrer que : $(A_1 \cap A_2) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B)$.

(b) On définit : $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E \,|\, \forall k \in \mathbb{N} \cap [1, n],\ x \in A_k\}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B)\,.$$

Exercice 7. Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E. Établir les équivalences suivantes :
(a) $A \cap \complement_E B \neq \emptyset \iff A \not\subset B$ (b) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$ (c) $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$

TD 05 :

Exercice 1 :

$f \{0, 1, 2, 3\} \quad n \to \frac{n^2 - n}{2}$

$$G_f = \{(x, f(x)) \in E \times E,\ x \in E\}$$

$$= \{(0,0), (1,0), (2,1), (3,3)\}$$

l'image par f de 1 et $f(1) = 0$

l'image par f de 2 et $f(2) = 1$

Antécédent de 1 par f :

$\to$ 2 est un antécendent de 1

2 n'a pas d'autre antécédent par f.

Exercice 2 :

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad n \to n^2$ bijective

$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \to x^2$ Surjective

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$ injective

$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \to z^2$ Bijective

Exercice 3 :

(a) Bijective (c) Bijective

(B) Injective (d) injective

L1 IEEEA, 2023-2024 Université de Rouen-Normandie

Lundi 9 octobre 2023

Fiche n° 5 - Applications

v2023-10-24

Une ***application*** $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément y de F noté $y = f(x)$.

- E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
- x est l'***antécédent*** de y par f et y est l'***image*** de x par f.
- Le ***graphe*** de $f : E \to F$ est : $\quad G_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}$.

Une application f est ***injective*** si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. C'est à dire :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$$

Une application f est ***surjective*** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

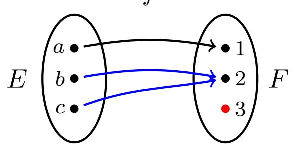
$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

Une application f est ***bijective*** si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists ! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

Proposition : $\quad$ (f bijective) $\iff$ (f injective et f surjective)

f

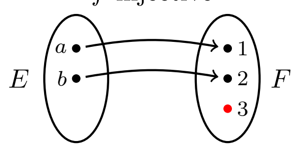


$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$

f non inj. car $f(b) = f(c)$

f non surj. car 3 n'a pas d'antécédent

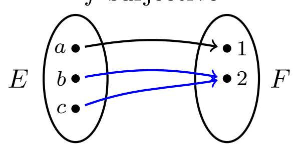
f injective



$G_f = \{(a,1), (b,2)\}$

f non surj.

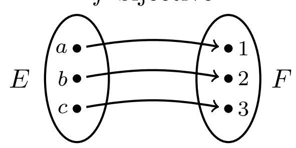
f surjective



$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$

f non inj.

f bijective



$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,3)\}$

f inj. et f surj.

Exercice 1. Soit $f : E = \{0,1,2,3\} \to E = \{0,1,2,3\}$ définie par $f(n) = (n^2 - n)/2$. Déterminer le graphe de f.
Quelle est l'image par f de 1 et 2? Quels sont les antécédents par f de 1 et 2, s'ils existent?
La fonction f est elle injective? Surjective? Bijective?

Exercice 2.
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$ $\qquad f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$ $\qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\qquad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$

Exercice 3. On considère les applications suivantes $E \to F$ définies par leur graphe. Déterminer si ces fonctions sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
(a) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6\}$, $G_f = \{(1,5), (2,6), (3,6)\}$ $\qquad$ (b) $E = \{1,2\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,5)\}$
(c) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,6), (3,5)\}$ $\qquad$ (d) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,6), (3,7)\}$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière (inférieure) de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ $(= \mathrm{E}(x))$.
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ $\qquad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ $\qquad f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^2 + n$ $\qquad f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Tracer leur graphe.
$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ $\qquad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\qquad g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ $\qquad g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$

Exercice 6. On considère la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence :

- $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = \sqrt{x}$
- Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est définie. On pose alors f_{n+1} la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par : $f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}$.

Montrer que les fonctions f_n sont injectives pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

injective :

$f_1 \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \to n^2$

$\forall x_1, x_2 \in E.$

$f(x_1) = f(x_2).$

$\Rightarrow x_1 = x_2.$

Surjective :

$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$

(1) $f_1 \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \to n^2.$ injective

Car si on prend 3 ont ne peut pas avoir un carré égal à 3.

Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tels que $f(n_1) = f(n_2)$

$n_1^2 = n_2^2$

$|n_1| = |n_2|$

or n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$,

donc $n_1 = n_2$.

On en déduit que f_1 est injective.

$f_2 \quad \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathbb{R}^+, \; x \to x^2$

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que

$f_1(x_1) = f_2(x_2)$ injective car

$$x_1^2 = x_2^2.$$

$$x_1 = x_2$$

Surjective

$$y = x^2$$

$x = \sqrt{y}$ donc surjective.

donc bijective car surjective et injective

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \to x^2$

injective

n'est pas injective car $-2 = 4$ ou $2 = 4$

Surjective :

$x^2 = -1$ pas possible

bijective : elle ne l'est pas car elle n'est pas injective mais est surjective

$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \to z^2$.

injective :

$z' = (-3-3i)(-3-3i) = 9 + 9i + 9i + 9$

$z = (+3+3i)(3+3i) = 9 + 9i + 9i..$

n'est pas injective car z^2 adm z' et z par antécédents

Surjective :

Surjective car soit $z^2 = y$

$y = R'e^{i\theta'}$ $z = Re^{i\theta}$ $\iff \begin{cases} R' = R^2 \\ \theta' = 2\theta \ [2\pi] \end{cases}$.

$\iff \begin{cases} R = \sqrt{R'} \\ \theta = \frac{\theta'}{2} \ [\pi] \end{cases}$.

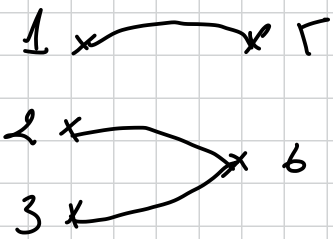
Synthèse :

on pose $y = R'e^{i\theta'}$

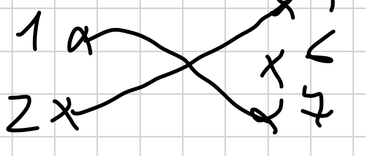
$z = \sqrt{R'}e^{\frac{i\theta'}{2}}$. f est surjective

Exercice 3 :

(a) n'est pas injective et surjective.

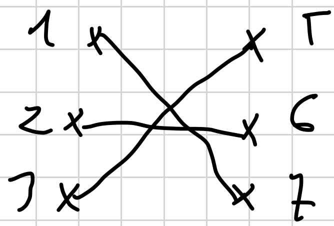


(b)



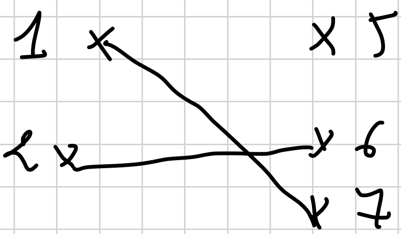
elle est injective et n'est pas surjective

(c)



injective, surjective
bijective.

(d)



injective
ni surjective

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \to n+1.$

injective.

$n_1 \to n_1 + 1$

$n_2 \to n_2 + 1$

$n_1 \neq n_2$ donc $n_1 + 1 \neq n_2 + 1.$

injective

<u>Surjective</u>:

$n_2 = n_1 + 1$

$n_1 = n_2 - 1$

$n_2 + 1 = 0$

on n'a pas d'antécédent. $n_2 = -1$

$\forall n \in \mathbb{N} : f_1(n) = n + 1 \geq 1$ f pas surjective

$\boxed{f_1(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*}$

$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$n \to n+1$

$n_1 + 1 = n_1$

$n_2 + 1 = n_2$

$n_1 + \cancel{1} = n_2 + \cancel{1}$

$n_1 = n_2$ injective.

Surjectivité.

$f(n) = m$

$n + 1 = m$

$n = m - 1$

Surjective

Bijective.

$f_3 \ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad n \to n^2 + n$

$n_1^2 + n_1 = n_1$

$n_2^2 + n_2 = n_2$

$n_1^2 + n_1 = n_2^2 + n_2 \qquad n_1^2 + n_1 - n_2^2 - n_2 = 0$

$n_1(n_1 + 1) = n_2(n_2 + 1)$

$(n_1 - n_2)(n_1 + n_2)$

$n_1 - n_2 = 0$

ou

$n_1 = -1 - n_2$

$(n_1 - n_2)((n_1 + n_2) + 1) \quad + n_1 - n_2$

$$(x^2+x)' = 2x+1$$

$2x+1=0 \iff x = -\frac{1}{2}$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x \geqslant -1/4$.

$\forall x \in \mathbb{Z},\ n^2 + n \geqslant -\frac{1}{4}$.

Fiche 5:

Exercice 4:

$$f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \to \lfloor n/2 \rfloor$$

f_4 est injective

$f_4(0) = 0$

$f_4(1) = 0$

donc f_4 n'est pas injective.

Surjective:

Soit $y \in \mathbb{N}$

y admet-il un antécédent ?

Soit $x = 2y$

$$f_4(x) = \left\lfloor \frac{2y}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor = y.$$

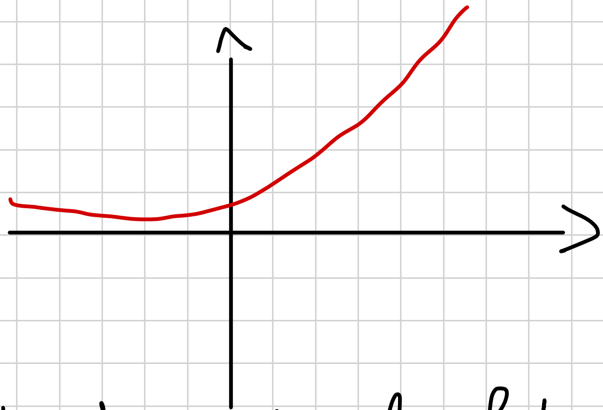
x est un antécédent de y

$$\left\lfloor \frac{2y+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor = y.$$

donc surjective

f_4 n'est pas bijective.

Exercice 5 :



$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to e^x$$

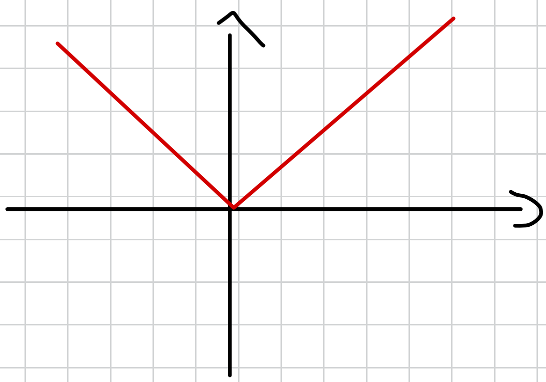
injective : car strictement croissante, donc la fct n'admet pas plus de 1 antécédent

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$
$$\ln(x_1) = \ln(x_2).$$

Surjective :

$$e^x = y$$
$$\ln(y) = \ln(x)$$

Exercice 5 :



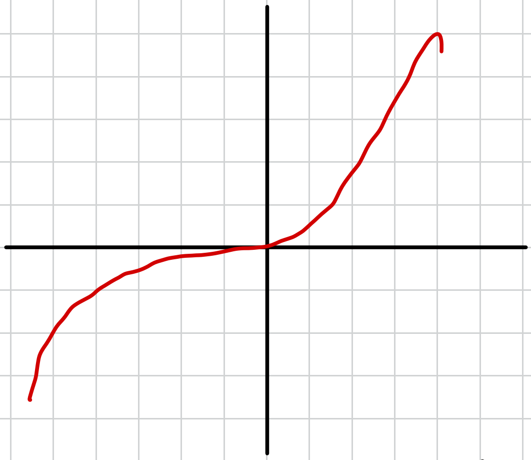
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) > 0.$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to |x|$$

x si $x >= 0$
$-x$ si $x <= 0$

$g_2(-1) = |-1| = 1$
$g_2(1) = |1| = 1$

Donc G_2 n'est pas injective le réel -1 n'a pas d'antécédent



$g'(x) = 3x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ g_3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$g_3 = \left(\frac{y}{|y|} \sqrt[3]{|y|} \right) = y$$

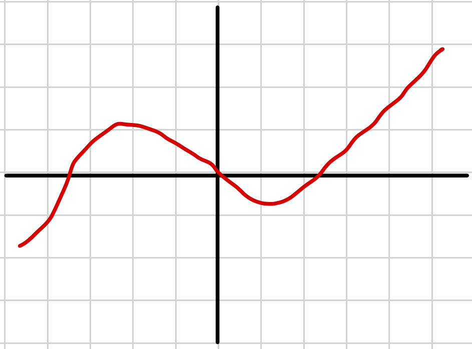
Si $y >= 0$;

$$g_3\left(\sqrt[3]{y}\right) = y$$

$$g_3\left(-\sqrt{-y}\right) = y$$

$g_4 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^3 - x$



$x^3 - x = 0$

$x(x-1)(x+1) = 0$

$g_4(-1) = g_4(1)$ Pas injective.

donc g_4 n'est pas injective g_4 est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 :

$f_0(x) = \sqrt{x}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}$$

But Mq $\forall n \in \mathbb{N}$.

$P(n) =$ f_n est injective.

On le démontre par récurrence.

Initialisation :

$P(0)$: on montre que $f_0(x) = \sqrt{x}$. est injective.

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}.$$

$$(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

donc f_0 est vraie

Hérédité : Supposons que f_n est injective pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que f_{n+1} est injective.

Soit $x_1\ x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $f_{n+1}(x_1) = f_{n+1}(x_2)$.

$$\Rightarrow \sqrt{1 + f_n(x_1)} = \sqrt{1 + f_n(x_2)}.$$

au carré $\Longrightarrow$ $1 + f_n(x_1) = 1 + f_n(x_2)$.

$\Longrightarrow f_n(x_1) = f_n(x_2)$.

$x_1 = x_2$

donc f_{n+1} est injective donc $P(n+1)$ est vraie

TD 06 :

Exercice 1 :

$f \circ g$

$f(x) = 2x - 1 \qquad g(y) = 3y + 2$

$f \circ g(y) = f(g(y)) = 2(3y+2) - 1$

$g \circ f(x) = \qquad g(f(x)) = 3(2x-1) + 2.$

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

$y = f(x)$

$\Longleftrightarrow y = 2x - 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2}.$

$$x = g(y)$$

$\Rightarrow x = 3y + 2$

$\Rightarrow y = \dfrac{x-2}{3} \qquad g^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}.$

b) $f(x) = x^2 \qquad g(y) = y + 1$

$f \circ g(y) = f(g(y)) = (y+1)^2.$

$g \circ f(y) = g(f(x)) = (x^2 + 1)$

Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad (f)_{n \geq 1} \text{ définie par}$$

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f \circ f_n \end{cases}$$

Montrons que pour tout $n >= 1$,

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{(2^n - 1)x + 1}$$

Par récurrence :

Initialisation $P(1)$:

$$f_1(x) = \frac{2^1 \times x}{(2-1)x+1} = \frac{2x}{x+1}$$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n >= 1$ tel que $P(n)$ est vraie. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$f_{n+1}(x) = f \circ f_n(x)$. (Par définition).

$$f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = \frac{2 f_n(x)}{f_n(x)+1} = \frac{2 \times \frac{2^n x}{(2^n-1)x+1}}{\frac{2^n x}{(2^n-1)x+1} + 1} \times \frac{(2^n-1)x+1}{(2^n-1)x+1}$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{2^{n+1} x}{(2^n + 2^n - 1)x + 1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1} - 1)x + 1}.$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie $\forall n >= 1$.

Exercice 3 :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2 \qquad A = [1, 2], \ B = [1, 4].$$

Rappel :

Image directe :

$f : E \to F$, $A \subset E$

$$f(A) = \{ f(x),\ x \in A \}$$
$$= \{ y \in F,\ \exists x \in A,\ y = f(x) \}$$

Image réciproque :

$B \subset F$

$$f^{-1}(B) = \{ x \in E,\ f(x) \in B \}$$

$A = [1,2]$, $B = [1,4]$.

$f(A) = [1,4]$.

Soit $x \in A$
$\iff x \in [1,2]$

$1 \leq x \leq 2$

$1 \leq x^2 \leq 4$

$f(A) \subset [1,4]$

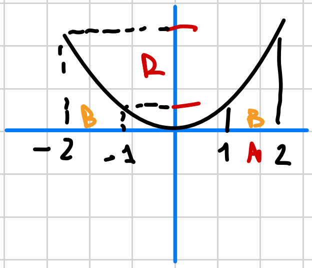
Soit $y \in [1,4]$

y est t.q. dans $f(A)$?

$y = f(\sqrt{y})$, $\sqrt{y} \in A$

d'où $[1,4] \subset f(A)$

donc $f(A) = [1,4]$.



$f^{-1}(B)$

Soit $x \in f^{-1}(B)$

$\iff f(x) \in B$

$\Rightarrow f(x) \in [1,4]$

$\iff 1 \leq f(x) \leq 4$

$f(x) = x^2$

$\iff 1 \leq x^2 \leq 4$

$\iff$

$\sqrt{1} \leq x \leq \sqrt{4}$ ou $-\sqrt{4} \leq x \leq -\sqrt{1}$

$\sqrt{1} \leq |x| \leq \sqrt{4}$

$\iff x \in [1,2]$ ou $x \in [2,-1]$

$\iff x \in [1,2,-2,-1]$

donc $f^{-1}(B) = [1,2] \cup [-2,-1]$.

Pas besoin de raisonner par double inclusion car on a raisonné par équi-
-valence.

$$f[f^{-1}(B)] = f[[1,2] \cup [-2,-1]].$$

$$= [1,4].$$

$$f^{-1}[f(A)] = f^{-1}[[1,4]].$$

$$1 \leq x^2 \leq 4$$

$$\sqrt{1} \leq |x| \leq \sqrt{4}$$

$$x \in [1, 2] \cup [-1, -2].$$

$$f(f^{-1}(B)) = f(\underbrace{[1,2]}_{=[1,4]} \cup \underbrace{[-2,-1]}_{=[1,4] \text{ par le m̂ raisonnement}})$$

$$= [1,4]$$

d) $f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{=B}) = f^{-1}(B)$

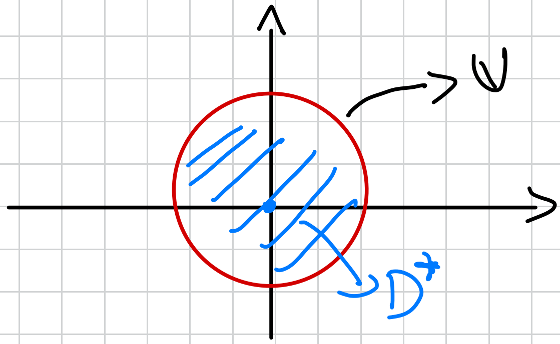
$$= [1,2] \cup [-2,-1]. \neq A$$

Exercice 4:

$$f\ \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$
$$z \rightarrow z^{-1}$$

$$U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

$$D^* = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}.$$



Montrons que $f(U) = U$

$z \in \mathbb{C}$

$z \to z^{-1} \Big\} \frac{1}{z}$

$f(U) = \frac{1}{U}$

$f\left(\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}\right)$

$f\left(\left\{\frac{1}{z}, \quad 1\right\}\right)$

Montrons que $f(U) = U$

Par double inclusion :

Soit $z' \in f(U)$, il existe $z \in U$ tel que
$z' = f(z) = \frac{1}{z}$.

Or, $|z'| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$

donc $z' \in U$.

Inclusion : $f(U) = U$

Soit $z' \in U$

On cherche a prouver que $z' \in f(U)$

CAD trouver $z \in U$ tel que $z' = f(z)$.

$$z' = \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{1}{z'}.$$

Vérification : $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{1}{\frac{1}{z'}} = z'$

De plus : $|z| = \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1.$

Donc $z' \in f(U)$.

Donc on a la double inclusion.

donc : $U \subset f(U)$.

$U = f(U)$.

On pose $g = f^{-1} = f$

$f^{-1}(U) = g(U)$

$= f(U) = U$

$$f^{-1}(U) = \{ z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) \in U \}.$$

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

f^{-1} : réciproque de f.

$z' = f(z) = \frac{1}{z}$

$z = \frac{1}{z'} = f^{-1}(z')$

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \to \frac{1}{z}$$

en effet :

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$.

on applique la fct inverse. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2}$

$z_1 = z_2$.

Donc f est injective

Surjectivité :

Soit $z' \in \mathbb{C}^*$

On cherche un antécédent z de z' $\quad z' = f(z)$.

$\iff z' = f(z)$.

$\iff z' = \dfrac{1}{z}$

$\iff z = \dfrac{1}{z'} \quad (z' \neq 0)$

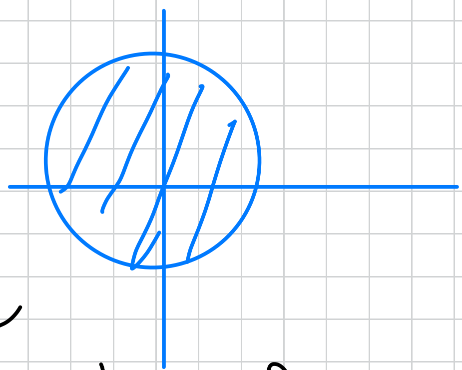
on a $z' = f\left(\dfrac{1}{z'}\right)$ donc f est surjective.

Donc f est bijective. et $\forall z' \in \mathbb{C}^*$, $f^{-1}(z') = \dfrac{1}{z'}$

donc : $f^{-1} = f$.

donc $f^{-1}(U) = f(U) = U$.

$f(D^*)$



$= \underbrace{\{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}}_{a}$

Montrons la première inclusion: (Pour toute inclusion:)

Soit : $z \in f(D^*)$

il existe $z \in D^*$ tel que $z' = f(z)$.

$z' = f(z) \iff z' = \dfrac{1}{z}$

$|z'| = \dfrac{1}{|z|}$, z dans le disque donc $0 < |z| < 1$

donc $\dfrac{1}{|z|} > 1$ donc $z' \in a$

* Soit $z \in A$,

on veut montrer que $z \in f(D^*)$.

On cherche $z \in D^*$, tel que $z' = f(z)$.

$$z' = \frac{1}{z}$$

$$z = \frac{1}{z'}$$

c'est ce que $z \in D^*$,

on a $f(z) = z'$ il reste a montrer que $z \in D^*$

$$|z| = \frac{1}{|z'|} \quad |z'| > 1 \text{ donc } |z| < 1$$

$$\frac{1}{|z'|} < 1 \quad \text{Donc } z \in D^*$$

donc $z' \in f(D^*)$

d'où $f(D^*) = A$.

on a $f^{-1} = f$

$$f^{-1}(D^*) = f(D^*) = A$$

préRévision Algèbre CC 2 : Ensemble + fonctions si temps

Vendredi : réviser aussi composition applications

Dimanche : composition applications, relations

si temps groupes

Vu (priorité importante)

pas encore vu mais quelques notions

A perfectionner lundi (priorité max)

A faire (en 2nde prio)

L1 IEEEA, 2023-2024 Université de Rouen-Normandie
Lundi 9 octobre 2023

Fiche n° 5 - Applications

v2023-10-24

Une ***application*** $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément y de F noté $y = f(x)$.

- E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
- x est l'***antécédent*** de y par f et y est l'***image*** de x par f.
- Le ***graphe*** de $f : E \to F$ est : $G_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}$.

Une application f est ***injective*** si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. C'est à dire :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$$

Une application f est ***surjective*** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

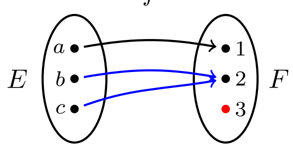
$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

Une application f est ***bijective*** si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

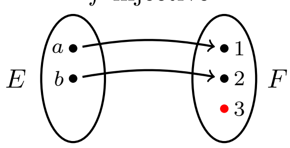
Proposition : (f bijective) $\iff$ (f injective et f surjective)

f



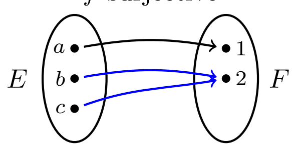
$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$
f non inj. car $f(b) = f(c)$
f non surj. car 3 n'a pas d'antécédent

f injective



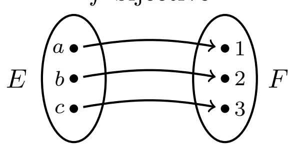
$G_f = \{(a,1), (b,2)\}$
f non surj.

f surjective



$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$
f non inj.

f bijective



$G_f = \{(a,1), (b,2), (c,3)\}$
f inj. et f surj.

Exercice 1. Soit $f : E = \{0,1,2,3\} \to E = \{0,1,2,3\}$ définie par $f(n) = (n^2 - n)/2$. Déterminer le graphe de f.
Quelle est l'image par f de 1 et 2? Quels sont les antécédents par f de 1 et 2, s'ils existent?
La fonction f est elle injective? Surjective? Bijective?

Exercice 2.
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$ $\quad f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\quad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$

Exercice 3. On considère les applications suivantes $E \to F$ définies par leur graphe. Déterminer si ces fonctions sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
(a) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6\}$, $G_f = \{(1,5), (2,6), (3,6)\}$ (b) $E = \{1,2\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,5)\}$
(c) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,6), (3,5)\}$ (d) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7), (2,6), (3,7)\}$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière (inférieure) de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ $(= \mathrm{E}(x))$.
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^2 + n$ $\quad f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Tracer leur graphe.
$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ $\quad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\quad g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ $\quad g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$

Exercice 6. On considère la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence :

- $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = \sqrt{x}$
- Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est définie. On pose alors f_{n+1} la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par : $f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}$.

Montrer que les fonctions f_n sont injectives pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1:

injections au plus un antécédent
surjection au moins un antécédent
bijection un unique antécédent

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to n^2$

injection:

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{N}$;

on suppose que : $f_1(x_1) = f_1(x_2)$

donc $x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Alors : $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ donc $x_1 = x_2$ Alors injective.

Surjection:

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \to n^2$

Soit $y \in \mathbb{N}$,

on pose $y = x^2$

$x = \sqrt{y}$. donc surjective.

bijection: n'est pas bijective car elle n'est pas à la fois surjective et injective, elle est juste injective.

$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \to x^2$

injection:

Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^+$;

on suppose que $f_2(x_1) = f_2(x_2)$;

$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Alors on a montré que $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ donc injective car dans $\mathbb{R}^+$

Surjection:

Soit $y \in \mathbb{R}^+$;

on pose $y = x^2$

$x = \sqrt{y}$ } car dans $\mathbb{R}^+$ Donc oui bijective

bijective : Elle est bijective car à la fois injective et surjective.

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$

injection :

Soit $x \in \mathbb{R}$;

on suppose que $f(x) = 9$

$x_1 = -3$ ou 3 plus de 1 antécedent donc n'est pas injective.

Surjection :

Soit $y \in \mathbb{R}$; $\boxed{!}$ négatif pas d'antecedent à refaire

on pose $y = x^2$

$x = \sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$ car dans $\mathbb{R}$ donc surjective

bijective : n'est pas bijective car elle n'est pas à la fois surjective et injective, elle est uniquement surjective

$f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \to z^2$

injection : (Sachant que : $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$) exemple 2 est inclus dans $\mathbb{C}$

Soit $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$;

on a $x_1^2 = 9$, $x_2^2 = 9$ donc 9 admet plus de 2 antécédants.

Donc pas injective.

bijection :

Soit $y \in \mathbb{C}$;

on pose $y = x^2$

$x^2 = \sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$

gros doute besoin d'explications.

$y = r'e^{i\theta'}$ On cherche z tq $y = z^2$, $z = re^{i\theta}$.

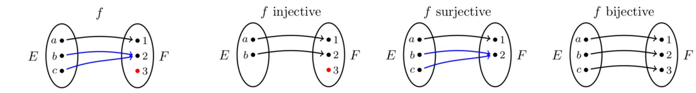
$y = z^2 \Leftrightarrow r'e^{i\theta'} = r^2 e^{2i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = r^2 \\ \theta' = 2\theta \ [2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{r'} \\ \theta = \dfrac{\theta'}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$z = \sqrt{r'}\, e^{i\frac{\theta'}{2}}$$

12:46 Jeudi 23 novembre

Logique Structurale Et Algébrique



$G_f = \{(a,1),(b,2),(c,2)\}$ — f non inj. car $f(b) = f(c)$ — f non surj. car 3 n'a pas d'antécédent

$G_f = \{(a,1),(b,2)\}$ — f non surj.

$G_f = \{(a,1),(b,2),(c,2)\}$ — f non inj.

$G_f = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ — f inj. et f surj.

Exercice 1. Soit $f : E = \{0,1,2,3\} \to E = \{0,1,2,3\}$ définie par $f(n) = (n^2 - n)/2$. Déterminer le graphe de f. Quelle est l'image par f de 1 et 2? Quels sont les antécédents par f de 1 et 2, s'ils existent? La fonction f est elle injective? Surjective? Bijective?

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$ $\quad f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2$ $\quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ $\quad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$

Exercice 3. On considère les applications suivantes $E \to F$ définies par leur graphe. Déterminer si ces fonctions sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
(a) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6\}$, $G_f = \{(1,5),(2,6),(3,6)\}$ (b) $E = \{1,2\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7),(2,5)\}$
(c) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7),(2,6),(3,5)\}$ (d) $E = \{1,2,3\}$, $F = \{5,6,7\}$, $G_f = \{(1,7),(2,6),(3,7)\}$

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière (inférieure) de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ $(= \mathrm{E}(x))$.
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ $\quad f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^2 + n$ $\quad f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Tracer leur graphe.
$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x$ $\quad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\quad g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ $\quad g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$

Exercice 6. On considère la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence :

- $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = \sqrt{x}$

Exercice 1 : $f : E = \{0, 1, 2, 3\} \to E\ \{0, 1, 2, 3\}$

$f(n) = (n^2 - n)/2$

$G_f = \{0;0\}, \{1;0\}, \{2;1\}, \{3;3\}\}$

l'image de 1 et 2

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

antecent de 1 : 2
antécédent 2 : antecedent n'existe pas

Pas injective, pas surjective.

Exercice 5 :

(a) Mq $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

$E \xrightarrow{f} F \leftarrow f(A) \,\&\, f(B).$

Supposons que $A \subset B$

Soit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ tel que $y = f(x)$

Or $A \subset B$, et $x \in A$

donc $x \in B$

Puisque $y = f(x)$ et $x \in B$, on a

$y \in f(B)$.

Donc $f(A) \subset f(B)$.

b) Mq $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

Supposons que $C \in D$

Soit $x \in f^{-1}(C)$

Definition de $f^{-1}(C)$

$f^{-1}(C) = \{ x \in E, f(x) \in C \}$

Alors $f(x) \in C$

Or, $C \subset D$ donc $f(x) \in D$

donc $x \in f^{-1}(D)$

donc $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

exemple :

Soit $y \in f(A \cap B)$

Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

$x \in A \cap B$ donc $x \in A$

Or, $y = f(x)$ donc $y \in f(A)$, $x \in A \cap B$ donc $x \in B$

donc $y \in f(B)$.

donc $y \in f(A) \cap f(B)$

donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

prenons : $f(x) = x^2$

$$A = [-6, 6]$$

$$B = \{6\}$$

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

$x \in f^{-1}(C \cup D)$

$\Leftrightarrow f(x) \in C \cup D$

$\Leftrightarrow f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$.

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C)$ ou $x \in f^{-1}(D)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

g)

$x \in C, x \notin D$.

$f(x) \in C, f(x) \notin D$

$f(x) \in C \setminus D$ $\qquad$ $f(x) \in C$ et $f(x) \notin D$

$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

TD 07.

Exercice 1:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,4)$
$(4,2), (4,3), (4,4)\}$.

Reflexivité : definition :

$\forall x \in X,\ x R x$

Cette relation est elle reflexive non car $(1,1)$ ✓
$(2,2)$ ✓
(mais 3 n'est pas en relat avec 3.)

Symétrique Definition : $\forall x, y \in X^2$,
$(x R y$ et $y R x)$ (a) la relat: est pas symétrique ex :
si $(3,1), (1,3)$

$x R y \Rightarrow y R x$

Antisymetrique Definition :
$\forall x, y \in X^2$,
$x R y$ et $y R x \Leftrightarrow x = y$

(a) $1 R 2$ et $2 R 1$ mai $1 \neq 2$
R pas antisymétrique.

Transitivité :

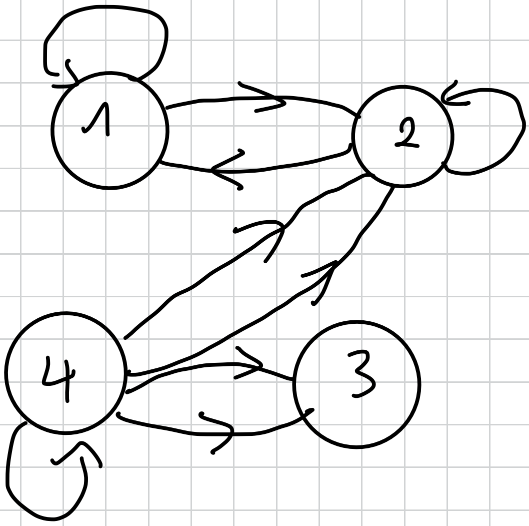
$\forall x, y, z \in X^3$
$x R y$ et $y R z \Rightarrow x R z$

(a) $(1 R 2)$ et $(2 R 4)$
$(1 \not R 4)$
pas transitive.

	1	2	3	4
1	✓	✓		
2	✓	✓		✓
3				✓
4		✓	✓	✓

ligne R colonne

* reflexivité : Diagonale remplie.
* Symétrique : Si case symétrique %. diagonale la relation symétrique.



Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des droites du plan. R parallélisme

Reflexivité :

$$\forall D \in E, \ D \parallel D.$$

R est reflexive.

Symetrique : oui

$\forall D_1, D_2 \in E$, Si $D_1 \parallel D_2$ $\quad D_2 \parallel D_1$

Transitivité :

Si $D_1 \parallel D_2$ et $D_2 \parallel D_3$

alors $D_1 \parallel D_3$

R est transitive

$\Rightarrow$ R est une relation d'équivalence.

Orthogonalité : R'

$D \not\perp D \quad \forall D \in E$

R' pas reflexive

Symétrie : $D_1 \perp D_2$, $D_2 \perp D_1$

Antisymétrie : pas antisymétrique.

pas transitif car si $D_1 \perp D_2$ et $D_2 \perp D_3$

$D_1 \parallel D_3$ mais $D_1 \not\perp D_3$

Exercice 3 :

$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$x \, R \, y \Leftrightarrow (x - y$ est mult de $3)$

(a) Mq R est une relation $\underbrace{\text{d'equivalence}}$

reflexive symétrique transitive

$x \, R \, x$

$\boxed{1 \, R \, 1}$ $\quad 1 - 1 \quad \boxed{0 \times 3 = 0}$ $\quad x = x$

Vrai $\quad x - x = 0$

Symétrique : donc 0 multiple de 3

$x \, R \, y$ et $y \, R \, x$

$x - y = 3k$

$-x + y = -3k$] donc symétrique car multiple de 3

transitive :

$x \, R \, y$ et $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$

$x - \cancel{y} + \cancel{y} - 3 = x - 3$

Dem : Soit $x, y, 3 \in \mathbb{Z}$ tel que : $x \, R \, y$ et $y \, R \, 3$ $\Rightarrow x \, R \, 3$

$\exists \, k, k' \in \mathbb{Z}$, tel que

$x - y = 3k$

$y - 3 = 3k'$

$x - 3 = 3k + 3k'$

$= 3(k + k')$

avec $(k + k') \in \mathbb{Z}$

Donc $x \, R \, 3$ relation transitive.

$\rightarrow$ R est une relation d'équivalence.

(b) $Cl(0) \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$

en effet, soit $x \in \mathbb{Z}$

$x \in Cl(0) \Leftrightarrow x \, R \, 0$

$\Leftrightarrow x - 0 = 3k$

$x = 3k. \; k \in \mathbb{Z}$

$Cl(1) = 3k + 1 = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

car $x - 1 = 3k$

$x = 3k + 1$

$Cl(2) = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

$Cl(3) = Cl(0)$

$\{Cl(0), Cl(1), Cl(2)\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = Cl(0) \cup Cl(1) \cup Cl(2)$.

$\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\}$ est un groupe cyclique

$\dot{0} + \dot{1} = \dot{1}$ $\quad \dot{2} + \dot{1} = \dot{0}$ $\quad \dot{2} + \dot{2} = \dot{1}$

$\dot{O}$

$\dot{2}$ $\dot{1}$

Exercice 4 :

$(x, y) R (a, b)$

$\iff x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

Reflexive : Si $(x, y) \in IR$

$x^2 + y^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 0$.

(x, y) est en relation avec lui-même

Symétrique : Soit $(x, y), (a, b) \in IR^2$

$(x, y) R (a, b)$

$(a, b) R (x, y)$

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$

donc $(a, b) R (x, y)$

transitivité :

Soit $(x, y), (a, b), (c, d) \in IR^2$

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

$x^2 + y^2 = c^2 + d^2$ par transitivité de l'égalité

donc $(x, y) R (c, d)$

$\longrightarrow$ Relation d'équivalence.

$E \to F$

Applications : (injectivité, surjectivité, bijectivité).

une application f est injective si $\forall x, x' \in E$, avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$ c'est à dire $\forall x, x' \in E \, [(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')]$

une application f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ c'est à dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \; y = f(x)$$

Une application est bijective si elle est à la fois injective et bijective :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, \; y = f(x).$$

TD08 :

Exercice 1 :

$$E \{0,1,2,3\} \longrightarrow E \{0,1,2,3\}$$

$f(n) = (n^2 - n)/2.$

$$G_f = \{\{0,0\}, \{1,0\}, \{2,1\}, \{3,3\}\}$$

Image de 1,2 : $f(1) = 0$, $f(2) = 1$

antecedent de 1 et 2 : antécédent de 1 : 2
antécédent de 2 : pas.

injective : 0 a 2 antécédents, donc pas injective
surjective : 2 n'a pas d'antécédent donc pas surjective
bijective : pas bijective.

Exercice 2 :

$$f_1 \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow n^2$$

injection :

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$;
on suppose que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

donc la fonction est injective

Surjection :

$$\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y = f(x)$$

$$y = x^2$$

n'est pas surjective prendre le contraire   car $f(x) = 2$ $x = \underbrace{\sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2}}_{\notin \mathbb{N}}$

$$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y \neq x^2$$

Vrai on pose $y = \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} \neq x^2$ Donc pas surjective.

bijection non.

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to x^2$$

injection :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^+, f(x) = f(x')$$
$$x^2 = x'^2 \Rightarrow x = x'$$

donc elle est injective

Surjection :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}^+, y = f(x)$$

$$y = x^2$$

est surjective $x = \underbrace{\sqrt{y}}_{\mathbb{R}^+}$ ou $\underbrace{-\sqrt{y}}_{\text{dans } \mathbb{R}}$

bijection : elle l'est.

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

injection :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \quad x_1^2 = x'^2$$
$$x = x'$$

Ce n'est pas vrai

car

$x^2 = 4$ $x = -2$ ou 2 plus de 1 antécédent

donc pas injective.

surjection :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x) \Rightarrow y = x^2$$

Soit $y \in \mathbb{R}$;

on pose $x = \sqrt{y}$ ou $-\sqrt{y}$ vrai dans $\mathbb{R}$

donc surjective

bijective : n'est pas bijective.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$n \to 2^n$$

injection : $\forall x, x',\ f(x) = f(x') \Rightarrow 2^x = 2^{x'}$

$x = x'$

Vrai donc injective

Surjection : $\forall y \in \mathbb{Z},\ \exists x \in \mathbb{Z},\ y = f(x)$

$y = 2^x$

Soit $y \in \mathbb{Z}$;

on pose $x = -1$

$2^{-1} = 0,5$ faux pas surjective.

bijective : pas bijective

$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$
$$x \to \frac{3}{x}$$

injection :

$\forall x, x' \in \mathbb{R}^*;\ f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{x'} \Rightarrow x = x'$

Vrai elle est injective

Surjection : $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

$y = \frac{3}{x}$

$\boxed{x = \frac{3}{y}}$ Donc surjective

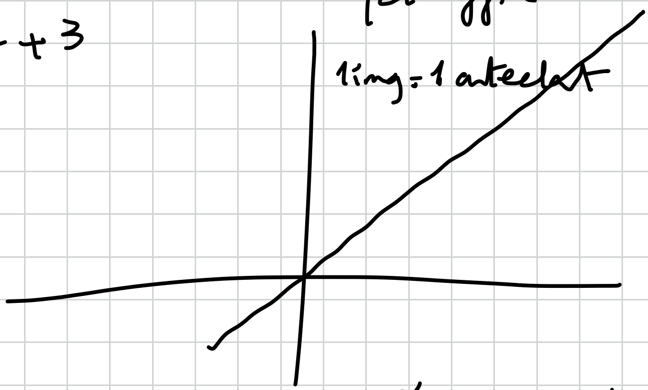
Alors bijective

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \to 2x+3$

fct affine



injective :

$\forall x, x', \; f(x) = f(x') \Rightarrow \cancel{2}x\cancel{+3} = \cancel{2}x'\cancel{+3}$

$x = x'$

$\boxed{\text{Vrai}}$ injective

surjective :

$\forall y \in \mathbb{Q}, \exists x \in \mathbb{Q}, y = f(x)$

$y = 2x+3$

$x = \frac{y-3}{2}$ Vrai $\quad x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$

bijective : oui

$e^x \to 1 + x^2$

TD 08 (Partitions relations d'équi
relation d'ordre).

Exercice 1 :

1) Mq $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$

Soit $x \in E$;

$x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B$

$\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$ et $x \in B$

$\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i \cap B$.

$\Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$

2)

$x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B)$

$\Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$ ou $x \in B \Leftrightarrow x \in A_i \cup B$ ou $x \in A_i \cup B$

$\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i \cup B$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$

Exercice 3 :

(a) R, A, T

1) Reflexive : $x R x$

$(n, p) \; R \; (n, p) \Leftrightarrow (\cancel{n < n}$ ou $n = n$ et $p \leq p)$
$(n = n$ et $p = p)$

Donc elle est reflexive.

Antisymétrique :

$$\forall x, y \in E,\ x R y \text{ et } y R x \Rightarrow x = y$$

$$\forall (n,p),(n',p') \in E^2,\ (n,p) R (n',p') \text{ et }$$
$$(n',p) R (n,p) \Rightarrow (n,p) = (n',p')$$

$n < n'$ ou $n = n'$ et $p \leqslant p'$
$n' < n$ ou $n' = n$ et $p' \leqslant p'$

$n = n$ et $p \leqslant p'$

Transitive :

$x R y,\ y R z \Leftrightarrow x R z$

$n < n'$ ou $(n = n'$ et $p \leqslant p')$ et $(n' < a$ ou
$(n' = a$ et $p' \leqslant b)$

$n < n' < a$

$n = n' = a$ $\qquad p \leqslant p' \leqslant b$

$n = a$ et $p \leqslant b$

$n < a$ ou $(n = a$ et $p \leqslant b)$

Donc transitive

Donc est une relation d'ordre et ... est totale

$x \leq y$ ou $y \leq x$

totale

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] & (0,1) \arrow[r] & (1,0) \arrow[r] & (1,1) \arrow[d] \\
 & & & (2,0) \arrow[d] \\
 & & & (2,1)
\end{tikzcd}$$

TD 09 : Relation d'ordre et élem remarquables.

Exercice 1 :

a) Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$

$$A = [2, \pi[$$

Borne inferieure : 2 est un minorant de A

plus grands des minorants. car $\forall x \in A, \ 2 \leqslant x$

par l'absurde soit m un minorant de A avec $m > 2$

C'est absurde car $2 \in A$ et $m \notin A$

minimum = 2

Borne Supérieure : π

plus petit des majorants

tout les elem de $A < \pi$ Vrai

$\pi = \sup A$

max A n'existe pas.

$$B = [2, +\infty[.$$

Sup b : $+\infty$ ou n'existe pas

inf b : 2

min : 2

maj b : n'existe pas

$C :]2, +\infty[$

sup C : n'existe pas
inf C : 2
min C : n'existe pas
max C : n'existe pas

$D = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

* max D 1
* Sup D 1
* min D : n'existe pas
* inf D : 0

b) Dans IN

$A = [\![2, 4]\!]$

min A = 2
inf A = 2
max A = 4
Sup A = 4

$B : [\![2, +\infty [\![$
min B = 2
max = existe pas

$C :]\!] 2, +\infty [\![$
min C = 3
max C : n'existe pas
Sup : / / /

Serie d'Exercices :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to |x|$

$A = [2, 4]$

$B : [-1, 3]$

$f(A)$: $2 \leqslant |x| \leqslant 4$

$f(A) = [2 ; 4]$

$f^{-1}(B)$ = $-1 \leqslant |x| \leqslant 3$ pas possible

Car une valeur absolue est positive

donc $0 \leqslant |x| \leqslant 3$

$0 < x < 3$

$f^{-1}(B) = [0 ; 3]$

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln(x)$

$A [1, e]$

$B = \left[\frac{1}{100}, 10\right[$

$f(A)$:

$1 \leqslant x \leqslant e$

$\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(e)$

$0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$

$0 \leqslant f(A) \leqslant 1$ $f(A) = [0 ; 1]$

$f^{-1}(B)$: $\frac{1}{100} \leqslant \ln(x) \leqslant 10$ $e^{1/100} \leqslant x \leqslant e^{10}$

2 Raisonnements selon moi :

Soit dire que $\frac{1}{100}$ tend vers 0

et donc $e^{1/100} = e^0 = 1$

et Donc

dire que $f^{-1}B = \underbrace{[1 ; e^{10}]}_{\text{pas fou}}$

Mais d'autre part : garde $e^{1/100} \simeq 1,0...$

et donc plus rigoureux de dire :

$f^{-1}(B) = [e^{1/100} ; e^{10}]$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n^2 - n - 1$

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{3, 4\}$

$f(A)$:

$f(-2) = (-2)^2 + 2 - 1 = 4 + 2 - 1 = 5$
$f(-1) = (-1)^2 \cancel{+1} \cancel{-1} = 1$
$f(0) = 0^2 - 0 - 1 = -1$
$f(1) = 1^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1$
$f(2) = 2^2 - 2 - 1 = 4 - 3 = 1$

$f(A) = \{5 ; 1\}$ car $-1 \notin \mathbb{N}$

$f^{-1}(B) =$

$n^2 - n - 1 = 3$

$n^2 - n - 1 = 4$

$n^2 - n - 1 = 3$

$n^2 - n - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1 \times -4)$

$= 16 + 1 = 17$

$\Delta > 0$ 2 solutions

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_{1,2} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2}$

$x_{1,2} = \underbrace{\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}}_{\notin \mathbb{N}}$

$n^2 - n - 1 = 4$

$n^2 - n - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (1 \times -5)$

$\Delta = 1 + 20$

$\Delta = 21$

$21 > 2$

$x_1 = \dfrac{+1 + \sqrt{21}}{2}$

$x_2 = \dfrac{+1 - \sqrt{21}}{2}$

$\notin \mathbb{N}$

Donc $f^{-1}(B)$ n'existe pas

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to \ln(1 + x^2)$

injection:

$\forall x, x',\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\ln(1+x^2) = (\ln 1 + x'^2) \Rightarrow 1 + x^2 = 1 + x'^2$

$\Rightarrow x^2 = x'^2$

Car pour $x_2 = 2$

$x_1 = -2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1 \neq x_2$.

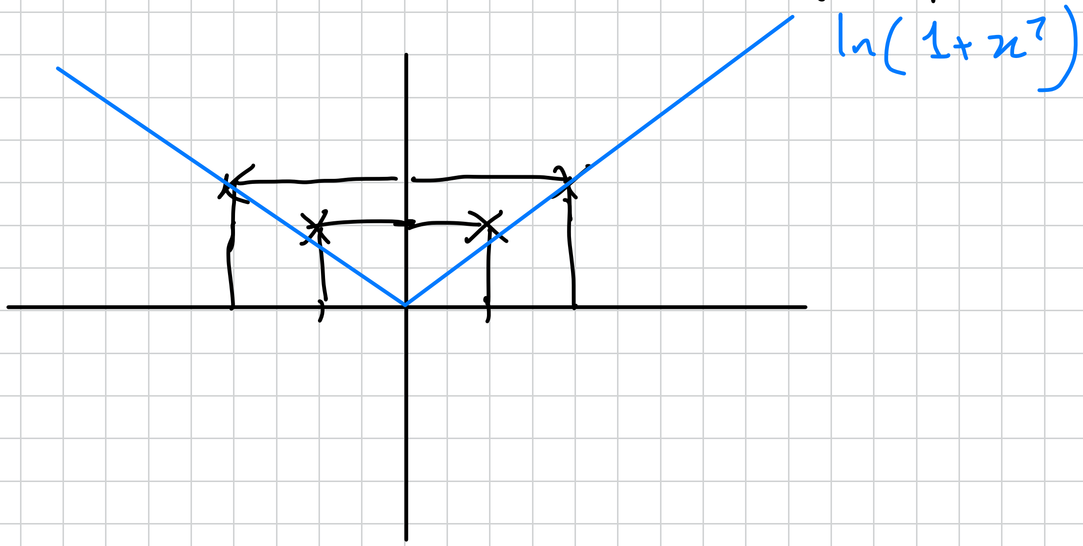
$x_1 = -x_2$

$x_1 = x_2$ Donc pas injective

Surjection:

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

2 et -2 ont la même image qui $\ln(5)$



$\ln(1+x^2)$ ne peut pas être négative

elle n'est donc pas surjective

(la conclusion peut être améliorée).

$\log: 3(2x+3)+1$

$\boxed{= 6x + 10}$

$x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2x - 2y$

$x R x$

$x R x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 2x - 2x$

$\cancel{x^2} + \cancel{2x} = \cancel{x^2} + \cancel{2x}$

$0 = 0$ $\boxed{\text{reflexive}}$

$x R y \Rightarrow y R x$

$x^2 - y^2 = 2x - 2y \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2y - 2x$

$\boxed{2y - 2x = y^2 - x^2}$

$\boxed{\text{symétrique}}$ (c, d)

$x R y,\ y R z \Rightarrow x R z$

$x^2 - y^2 = 2x - 2y$

$+$ et

$y^2 - c^2 = 2y - 2D$

$x^2 - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} - c^2 = 2x - \cancel{2y} + \cancel{2y} + 2D$

$x^2 - C^2 = 2x + 2D$ $\boxed{\text{transitive}}$

$cl(0)$,

$$cl(0)\ R\ y = 0^2 - y^2 = 2x0 - 2xy$$

$$= -y^2 = -2y$$

$$y^2 = 2y$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$cl(0) = \{0; 2\}.$$

$$cl(1) = \{1\}.$$

$$1^2 - y^2 = 2 - 2y$$

$$-y^2 = 1 - 2y$$

$$-y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$\boxed{y = 1}$$

reflexive :

$(x, y) \; R \; (x, y)$

$x^2 + y^2 \leqslant x^2 + y^2$ et $x \leqslant x$

reflexive.

antisymetique : $(x,y) \, R \, (a,b)$ et $(a,b) \, R \, (x,y) \Rightarrow (x,y) = (a,b)$

$x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$ et $x \leqslant a$

et

$a^2 + b^2 \leqslant x^2 + y^2$ et $a \leqslant b$

Ca veut dire que

Si $x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$ et $a^2 + b^2 \leqslant x^2 + y^2$

Alors

$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ Donc anti symetrique

$x R y, \; y R z \Leftrightarrow x R z$

$x^2 + y^2 \leqslant a^2 + b^2$ et $x \leqslant a$

$a^2 + b^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2$ et $a \leqslant \alpha$

$\boxed{x^2 + y^2 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 \text{ et } x \leqslant \alpha.}$ transitive.

Relation d'ordre.

Exercice 4 :

$$f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$$

$\exists x \in C \setminus$

$$f^{-1}(C \setminus D)$$

$\exists x \in C \setminus D$

$\exists x \in C$ et $x \notin D$

L1 IEEEA, **2022-2023** Université de Rouen
Léo Glangetas Lundi 4 décembre 2023

Sujet de préparation au CC n° 2 (v2)
UE Logique et structures algébriques

Exercice 1. Soient a et b deux réels, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Montrer que f est une bijection et donner sa fonction réciproque f^{-1}. injection : $\exists x, x', ax+b = ax'+b$

surjection : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = ax+b$

$\cancel{a}x\cancel{+b} = \cancel{a}x'\cancel{+b}$ $\Rightarrow x = x'$

Donc injective

$x = \frac{y-b}{a}$ elle est surjective

A la fois injective et surje donc Bijective

Exercice 2. On considère les fonctions réelles : $f(x) = 2\,x + 1$ et $g(x) = x^2 + 3$.
Déterminer explicitement $(f \circ g)(x)$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) + 1$$
$$= 2(x^2+3) + 1 = 2x^2 + 7$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
(a) Déterminer $f([1, 2])$.

$$1 \leq x \leq 2$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

$f(x) = [\frac{1}{4}, 1]$

(b) Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$.

$f^{-1} =]0 ; 1]$

$\frac{1}{x^2} = -1$

$x^2 = \frac{1}{-1}$ $x^2 = -1$ } pas dans $\mathbb{R}$ donc $]-\infty ; 0]$ pas inclus

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.
(a) Démontrer : $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

$f^{-1}(C\setminus D) \Rightarrow f(x) \in C$ et $f(x) \notin D$
$\underline{x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \notin f^{-1}(D)}$ $=$

$f^{-1}(C\setminus D)$
$\underline{x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \notin f^{-1}(D)}$

(b) Démontrer : $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour (p, q) et $(p', q') \in E$:

$$\big((p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q')\big) \Longleftrightarrow \big(p+q = p'+q'\big)$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $x R x$ $(p,q) R (p,q)$

$\boxed{p+q = p+q}$ Donc reflexive

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique : $x R y \Leftrightarrow y R x$

$(p+q = p'+q') \Leftrightarrow (p'+q') = (p+q)$

Symetrique

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. $x R y,\ y R z \Leftrightarrow x R z$

$p+q = p'+q'$ et $p'+q' = a+b \Leftrightarrow p+q = a+b$

transitive

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$?

c'est une relation d'equivalence

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = c\ell((n, 0))$ la classe d'équivalence contenant $(n, 0)$:

$$A_n = \big\{(p,q) \in E \,\big|\, \big((p,q)\,\mathcal{R}\,(n,0)\,\big\}.$$

Expliciter les classes d'équivalence A_0, A_1 et A_2.

$cl(0,0) = \{(-1,1)\}$

$p+q=0$

$p=-q$

(f) Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \neq m$ implique $A_n \cap A_m = \emptyset$.

$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m \Leftrightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$

(g) Montrer que $\cup_{n\geq 0} A_n = E$. Que peut on dire sur la famille $(A_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 6. Si $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$, on écrit de façon unique $z = r\,e^{i\theta}$ avec $0 < r$, et $0 \leq \theta < 2\pi$, et pour $z = 0$, on pose $r = \theta = 0$ (donc $0 = 0e^{i\times 0}$). On considère alors la relation définie sur $\mathbb{C}$:

$$re^{i\theta} \leq r'e^{i\theta'} \iff [(r < r') \text{ ou } (r = r' \text{ et } \theta \leq \theta')]\,.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive :

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique :

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. Que peut on en conclure?

Exercice 7. (a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 3\}$.

tuto yts

(b) Dans $(\mathbb{Z}^*, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $B = \left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2\,n + 9 \geq 0\right\}$.

Je Dois serieusement Voir ca

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^+$ le loi de composition interne : $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative ($\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x * y = y * x$?)

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$A = (x * y) * z =$

$B = x * (y * z) =$

(c) Est ce que la loi $*$ est associative?

(d) Elément neutre : Montrer qu'il existe un élément $e \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x*e = e*x = x$.

(e) Quels sont les éléments x de $\mathbb{R}^+$ qui admettent une élément symétrique? (c'est à dire il existe $x' \in \mathbb{R}^+$ $x * x' = x' * x = e$)

Exercice 9. (a) On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif. Montrer que l'application $f(z) = z^4$ définit un morphisme de $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^*$:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad f(z \times z') = f(z) \times f(z').$$

(b)[1] Expliciter l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

[1] On pourra utiliser : Pour $k \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k = 4q + r$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Exercice 1 :

injectivité : $\exists x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x'),$

$\Longleftrightarrow x = x'$

$$ax + b = ax' + b$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$x = x'$$

Surjectivité : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

$y = ax + 3$

Soit $y \in \mathbb{R}$,

on pose $x = \dfrac{y-b}{a}$;

$x = \dfrac{y-b}{a} \in \mathbb{R} \, (a \neq 0)$

Donc surjectivité donc bijective.

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}}$$

Exemple :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$x \to x^2$

$f(x) = y$

$x^2 = y$

$x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$

plus d'unicité de la formule.

$2(x^2+3)+1 = 2x^2+7$

$1 \leq x \leq 2 \quad \frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$

$f(x) : \left[\frac{1}{4}, 1\right]$

$f^{-1}([-1, 1])$ $\quad$ ($\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$)

$x \to \frac{1}{x^2}$

$[-1 ; 1]$ α

$f(x) : [-1, 1]$

$f^{-1}(\alpha)$

$-1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1$

n'était pas défini sur $\mathbb{R}$ cst donc sur $\mathbb{R}^*$ alors

[Def relation équivalence].

Exercice 1:

2 méthodes pour prouver bijection:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to ax+b$

1ère :

injection: $\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x')$

$\Leftrightarrow x = x'$

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$;

$\cancel{a}x + \cancel{b} = \cancel{a}x' + \cancel{b}$

donc : $x = x'$

Alors elle est injective

Surjection: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$

$y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = ax+b$

Soit $y \in \mathbb{R}$,

on a $x = \frac{y-b}{a}$ $x \in \mathbb{R}$

Donc Alors surjective donc Bijective

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

2ème:

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, y = ax+b$

Soit $y \in \mathbb{R}$;

on a : $y = ax+b$,

il suffit de trouver x.

$x = \frac{y-b}{a}$

Exercice 2:

$f \circ g(x)$: $f(g(x)) = 2(x^2+3)+1 = 2x^2+6+1$

$f \circ g(x) = 2x^2+7$

Exercice 3:

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \to \frac{1}{x^2}$

A) Calcul $f([1,2])$: $1 \leq x \leq 2$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

Si $x \in [1,2]$, $f(x) \in [\frac{1}{4}, 1]$.

$f[1,2] \subset [\frac{1}{4}, 1]$

égalité par le TVI.

$$f([1,2]) = [\tfrac{1}{4}, 1]$$

B) $f^{-1}([-1,1])$:

$$-1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$$

$$-1 \leq x^2 \leq 1$$

$$x^2 \geq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Donc $f^{-1}([-1,1]) = [-1;0[\cup [1;+\infty[$

$x^2 - 1 \geq 0$

$(x-1)(x+1) \geq 0$

$x \leq -1$ ou $x \geq 1$

Exercice 4 :

(a) $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C \setminus D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C)$ et $x \notin f^{-1}(D)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

(b) $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$

$x \in f^{-1}(C)$ et $x \notin f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C \setminus D)$

Exercice 5 :

a) Montrez que R est reflexive :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{N}^2, \ (x, x') R (x, x')$$

$$(P, q) R (P, q) \Leftrightarrow (P + q = P + q)$$

Donc elle est reflexive.

b) Mq R est symétrique :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x R y \Leftrightarrow y R x$$

$$(P, q) R (P', q') \Leftrightarrow (P', q') R (P, q)$$

$$P + q = P' + q' \Leftrightarrow P' + q' = P + q$$

donc elle est symétrique.

c) Mq elle est transitive :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \ x R y, \ y R z \Leftrightarrow x R z$$

Soit $(P, q), (P', q'), (a, b) \in \mathbb{N}$.

$$P + q = P' + q' \text{ et } P' + q' = a + b \Leftrightarrow P + q = a + b$$

Donc transitive

D) Conclusion :

R étant reflexive, symétrique et transitive elle est donc une relation d'équivalence e)

$$A_0 \{ (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid (p,q) \mathcal{R} (0,0) \}$$

$$p+q=0$$

$$A_0 \{ (0,0) \}$$

$$A_1 \{ (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid (p,q) \mathcal{R} (1,0) \}$$

$$p+q=1$$

$$A_1 \{ (1,0) \}$$

$$A_2 \{ (2,0) \}.$$

f)

$$p+q=n \qquad p=-q+n$$

$$p+q=m \qquad p=-q+m$$

$$A_n = \{ (-q+n, q) \}$$

$$A_m = \{ (-q+m, q) \}$$

$$n \neq m \iff A_n \cap A_m = \emptyset$$

$$A_n \cap A_m = \{(-q+n, p)\} \cap \{(-q+m, p)\}$$

$$= p+q=n \text{ et } p+q=m$$

$$= \quad n=m$$ Donc faut alors par contraposés

on prouve que $n \neq m \Leftrightarrow A_n \cap A_m \neq \emptyset$

g) ?

$$(A_n)_{n \geq 2}$$

$A_0 \ (0,0)$

$A_1 \ (1,0)$

$A_2 \ (2,0)$

$A_3 \ (3,0)$

$A_4 \ (4,0)$

Exercice 6 :

Pratiquement un principe que en de TD

pas besoin de refaire.

Exercice 7 :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \mid x^2 < 3\}$$

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ $\qquad$ $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$

Borne superieur ; $\sqrt{3}$

le plus grand elements : n'existe pas.

Exercice 8 :

$$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid 2n + 9 \geq 0\}$$

$$n \geq \frac{-9}{2}$$

$$n \in [\![-4 ; +\infty [\![$$

le plus petit element -4

la borne inferieur : -4

a) le loi est commutative car $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ on a : $x * y \Leftrightarrow y * x$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2}$$

b)

$$A = (x * y) * z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\parallel$

$$B = x * (y * z) = \sqrt{y^2 + z^2} * x$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

$A = B$

Car c'est associative $\forall x, y, z$ $(x * y) * z = x * (y * z)$

D) $\exists e, \forall x, \quad x * e = e * x = x$

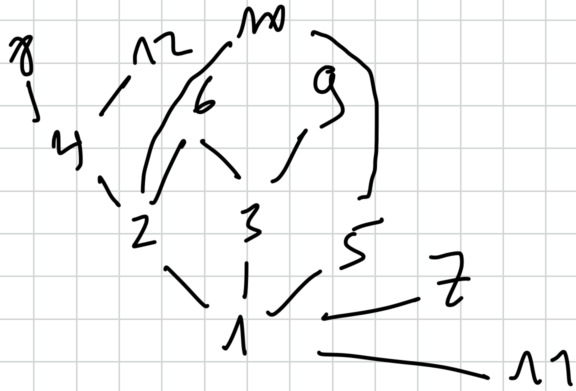
$e = 0$ car $\sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{0^2+x^2} = \sqrt{x^2} = x$ (car $\mathbb{R}^+$)

(e) $x' = x = 0$

$$\sqrt{x^2+x'^2} = \sqrt{x^2+x'^2} = e = 0$$

TD 09 :

Exercice 3 :



min A : 1 est le minimum de A

$\forall x_1 \in A,\ 1 \mid x.$

max A : n'existe pas.

M = maximum A ssi $\forall x \in A,\ x \mid M$

inf A = 1

sup A : $M = 12 \times 11 \times 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 27720$

Elements minimaux : $\{1\}$

Elements maximaux : $\{8, 12, 10, 9, 7, 11\}$.

TD 10 :

$$E \times E \xrightarrow{lci} E$$

a) $x * a = x + y + xy$) oui

b) $x * y = \dfrac{\overline{x \times y}}{1 + x^2 + y^2}$ $\qquad \dfrac{1}{3}$

$x = 1 \quad y = 1$

c)

d) $E = \{V, F\}$, V et F) F
V ou F) V
V et V
F et F
oui

e) $\mathcal{P}(E)$

Soit A, B deux sous ensemble de E

Alors $A \cup B \subset E$?
et $A \cap B \subset E$?

oui : $\forall x \in A \cup B$
$x \in A$ ou $x \in B$ donc $x \in E$

idem pour intersection.

$$E^E = \{ f : E \to F \}$$

$$1 + xy - x - y = (1 - x)(1 - y)$$

puisque $x < 1$ et $y < 1$

$$(1 - x)(1 - y) > 0$$

$$1 + xy - x - y > 0$$

$$1 + xy > x + y$$

$$1 > \frac{x + y}{1 + xy}$$ Donc LCI

$\forall x, y \in]-1, 1[$

$x \oplus y \in]-1, 1[$

$\oplus$ st num LCI.

Commutativité : $\forall x, y \in E, \; x * y = y * x$

e élément neutre ssi :

$\forall x, \; e * x = x * e = x$

Soit e : Tq $\forall x \in E, \; e * x = x$

$x * e \; , \; x * e = x$

$e = 0$

$$\frac{x+y}{1+xy}$$

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

$$y * x = \frac{y+x}{1+y \times x}$$

$$\underbrace{(x * y)}_{\alpha} * z = x * (y * z)$$

$$\frac{\alpha + z}{1 + \alpha z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \left(\frac{xy + xz}{1+xy}\right)}$$

$$x * \underbrace{(y * z)}_{\alpha} \qquad \frac{1+xy}{1+xy} +$$

$$\frac{x + \alpha}{1 + x\alpha} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + \frac{xy + xz}{1+yz}}$$

$$\frac{x+y}{1+xy} + \frac{z(1+xy)}{1+xy}$$

$$\frac{\frac{x+y+z+zxy}{1+xy}}{1+xy+xz+yz+1+xy}$$

$$\frac{(x+y+z+zxy)\times(1+xy+xz+1+xy)}{1+xy}$$

$$\frac{(x+y+z+xyz)\times(2+3xy)}{1+xy}$$

$$\frac{(x+xyz+y+z)}{1+xy+xz+yz}$$

L1 IEEEA, 2022-2023 Université de Rouen
Léo Glangetas Lundi 4 décembre 2023

Sujet de préparation au CC n° 2 (v2)
UE Logique et structures algébriques

Exercice 1. Soient a et b deux réels, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Montrer que f est une bijection et donner sa fonction réciproque f^{-1}.

injection : $\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \iff x = x'$

Soit $x, x' \in \mathbb{R}$; on a : $\underbrace{ax+b}_{f(x)} = \underbrace{ax'+b}_{f(x')} \iff x = x'$ Donc injective

Surjection : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x) \iff y = ax + b$
$x = \frac{y-b}{a}$

$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}}$

Exercice 2. On considère les fonctions réelles : $f(x) = 2\,x + 1$ et $g(x) = x^2 + 3$.
Déterminer explicitement $(f \circ g)(x)$:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(x^2+3) + 1 = 2x^2 + 6 + 1 = 2x^2 + 7$

$x^2 \leq 1$ $x^2 \geq 1$ $\frac{1}{x^2} \leq 1$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $-1 \geq x \geq 1$
(a) Déterminer $f([1, 2])$.

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \to \frac{1}{x^2}$

$1 \leq x \leq 2$

$-1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

$-1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

$\boxed{-1 \text{ ou } 1}$

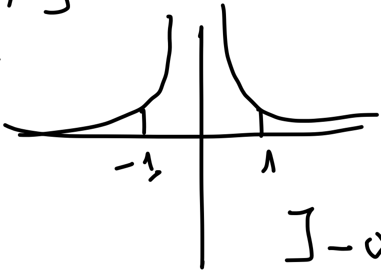
$f([1,2]) = [\frac{1}{4} ; 1]$

$-1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

(b) Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$.

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \to \frac{1}{x^2}$

$-1 \geq x \geq 1$



$-1 \geq x^2 \geq 1$

$f^{-1}([-1, 1])$

$]-\infty ; -1] \cup [1, +\infty[$

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.
(a) Démontrer : $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

$f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \}$ $E \to F$

$f^{-1}(C \setminus D) = \{ x \in E, f(x) \in C \setminus D \}$

$x \in E, x \in f^{-1} C \setminus D, x \in f^{-1}(C)$ et $x \notin f^{-1}(D)$

(b) Démontrer : $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$.

$f^{-1}(C) = \{ f(x) \in C \}$ $f^{-1}(D) = \{ f(x) \in C \}$ $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \iff x \in f^{-1}(C)$ et $x \notin f^{-1}(D)$

$\iff x \in f^{-1}(C \setminus D)$

Exercice 5. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour (p, q) et $(p', q') \in E$:

$$\big((p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q')\big) \iff \big(p+q = p'+q'\big)$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, (p,q)\,R\,(p,q)$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$;

$(p,q)\,R\,(p,q) \iff \cancel{p}+q = \cancel{p}+\cancel{q} \iff 0=0$

Vrai

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique :

$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x\,R\,y \iff y\,R\,x$

Soit $(p,q), (p',q') \in \mathbb{N}$;

on a : $(p,q)\,R\,(p',q') \iff (p',q')\,R\,(p,q)$ $\quad p+q = p'+q' \iff p'+q' = p+q$

Vrai

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive.

$\forall x, y, z,\ x\,R\,y,\ y\,R\,z \iff x\,R\,z$

$p+q = p'+q'$ et $p'+q' = a+b \iff p+q = a+b$

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$?

c'est une relation d'équivalence

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = c\ell((n, 0))$ la classe d'équivalence contenant $(n, 0)$:

$$A_n = \big\{(p,q) \in E \,\big|\, \big((p,q)\,\mathcal{R}\,(n,0)\big\}.$$

Expliciter les classes d'équivalence A_0, A_1 et A_2.

$p+q=0$

$A_0 = \{(p,q) \mid p+q=0\} \iff \{(0,0)\}$ car dans $\mathbb{N}$

$A_1 = \{(0,1), (1,0)\}$ $\quad A_2\ \{(0,2), (2,0)\}$

(f) Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \neq m$ implique $A_n \cap A_m = \emptyset$.

$p+q = n+0 \qquad p+q = m+0$

$p+q = n = m$ donc $n = m$ Alors $A_n \cap A_m \neq \emptyset$

Donc si $n \neq m \iff A_n \cap A_m = 0$

(g) Montrer que $\cup_{n\geq 0} A_n = E$. Que peut on dire sur la famille $(A_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 6. Si $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$, on écrit de façon unique $z = r\, e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $0 < r$, et $0 \leq \theta < 2\pi$, et pour $z = 0$, on pose $r = \theta = 0$ (donc $0 = 0e^{i\times 0}$). On considère alors la relation définie sur $\mathbb{C}$:

$$re^{i\theta} \leq r'e^{i\theta'} \iff [(r < r') \text{ ou } (r = r' \text{ et } \theta \leq \theta')] .$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive :

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique :

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. Que peut on en conclure?

Exercice 7. (a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 3\}$.

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

Borne sup : $\sqrt{3}$

le plus g elemts : n'exite pas

(b) Dans $(\mathbb{Z}^*, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $B = \left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2\,n + 9 \geq 0\right\}$.

$n \geq -\frac{9}{2}$

Borne Sup $= -4$

plus petit elem $: -4$

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^+$ le loi de composition interne : $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative ($\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x * y = y * x$?)

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2}$

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$A = \overset{x}{(x * y)} * z = \sqrt{x^2+y^2} * z$

$= \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$B = x * (y * z) =$

(c) Est ce que la loi $*$ est associative?

oui

(d) Elément neutre : Montrer qu'il existe un élément $e \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x*e = e*x = x$.

0

(e) Quels sont les éléments x de $\mathbb{R}^+$ qui admettent une élément symétrique? (c'est à dire il existe $x' \in \mathbb{R}^+$ $x * x' = x' * x = e$)

Exercice 9. (a) On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif. Montrer que l'application $f(z) = z^4$ définit un morphisme de $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^*$:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad f(z \times z') = f(z) \times f(z').$$

$f(z \times z') = z^4 \times z'^4$

$f(z) \times f(z') =$

$z^4 \times z'^4 = f(z \times z')$

(b)[1] Expliciter l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

$i^2 = -1 \qquad (i^2)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$-i$

$(-i)^2 = i^2 = -1 \qquad ((-i)^2)^2 = 1 \qquad (1 \text{ et } -1)$

[1] On pourra utiliser : Pour $k \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k = 4q + r$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$x R y \iff x^2 - y^2 = 2x - 2y$$

reflexivité : $\forall x \in \mathbb{Z}, \; x R x$

$$x^2 - x^2 = 2x - 2x$$
$$0 = 0$$

Symetrique :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \; x R y \iff y R x$$

$$x^2 - y^2 = 2x - 2y \iff y^2 - x^2 = 2y - 2x$$
$$-x^2 - 2y = -y^2 - 2x$$
$$2x - 2y = x^2 - y^2$$

transitivité :

$$\forall x, y, z \quad \underline{x R y}, \; \underline{y R z} \iff x R z$$

$$x^2 - y^2 = 2x - 2y \qquad y^2 - z^2 = 2y - 2z$$

$$x^2 - \cancel{y^2} + \cancel{y^2} - z^2 = 2x - \cancel{2y} + \cancel{2y} - 2z$$
$$x^2 - z^2 = 2x - 2z.$$

$$Cl(0) = \{\{0\}; \{2\}\}.$$

$$x R 0 = x^2 - 0 = 2x$$
$$x^2 = 2x \qquad \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 2}$$
$$x^2 - 2x = 0 \qquad x(x-2) = 0$$

$cl(1)$ $\qquad$ $x\,R\,0$

$$x^2 - 1 = 2x - 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad cl(1) = \{1\}.$$

Exercice 3 :

$$(x,y)\,R\,(x',y')$$

Montrez R reflexif :

reflexivité : $\quad x^2 + x^2 \leq x^2 + x^2$ et $x \leq x$

$$2x^2 = 2x^2 \text{ et } x = x$$

Antisymétrique

$$x\,R\,y \text{ et } y\,R\,x \Leftrightarrow x = y$$

$$x^2 + y^2 \leq x'^2 + y'^2 \text{ et } x \leq x'$$

et

$$x' + y^2 \leq x^2 + y^2 \text{ et } x' \leq x$$

autrement dit :

$$x^2 + y^2 = x' + y^2 \text{ et } x = x'$$

Transitive :

$$x\,R\,y,\ y\,R\,z \Leftrightarrow x\,R\,z$$

c'est une relation d'ordre totale

Exercice 4 : a) $x^2 < 2$

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Borne inférieure : $-\sqrt{2}$

le plus petit elem : n'existe pas

$$x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$$

b) $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{5}{n} \leqslant 2$$

$$\frac{5}{n} - 2 \leqslant 0$$

$$\frac{5 - 2n}{n} \leqslant 0$$

$\mathbb{N}^*$

$$5 - 2n \leqslant 0$$

$$-2n \leqslant -5$$

$$2n \geqslant 5$$

$$n \geqslant \frac{5}{2}$$

2,5 $\quad$ $+\infty$

$$[\![3 ; +\infty [\![$$

Borne Sup : n'existe pas

le plus grand élément : n'existe pas

l'an dernier

L1 IEEEA, **2022-2023**
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Groupe de TD :	

Note sur 20:

Contrôle continu n° 2 (v3)

UE Logique et structures algébriques
Lundi 15 décembre 2022 - Documents et calculatrices interdites

Exercice 1. On considère les fonctions réelles : $f(x) = 3\,x + 1$ et $g(x) = 2\,x + 3$.
Déterminer explicitement $(f \circ g)(x)$:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(2x+3)+1 = 6x+10$

Exercice 2. On considère la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2 - y^2 = 2x - 2y.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $x R x \iff x^2 - x^2 = 2x - 2x$

$x^2 - x^2 = 0$
$2x - 2x = 0$

$0 = 0$

R est reflexive

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ xRy \iff yRx$

$x^2 - y^2 = 2x - 2y \iff (y^2 - x^2 = 2y - 2x) \times -1$

$x^2 - y^2 = 2x - 2y$ R est symetrique

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive :

$\forall x, y, z \in \mathbb{Z},\ xRy, yRz \iff xRz$

$x^2 - y^2 = 2x - 2y$ et $y^2 - z^2 = 2y - 2z \iff x^2 - z^2 = 2x - 2z$

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$? Déterminer les classes d'équivalence cl(0) et cl(1).

R est une relation d'equivalence car R est R, S, T.

$cl(0) = \{\{0\}, \{2\}\}$

$x^2 - 1 = 2x - 2$

$cl(1) = \{\{1\}\}$.

$x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice 3. On considère la relation définie sur $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty[\times[0, \infty[$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \iff \Big[(x^2 + y^2 \leq x'^2 + y'^2) \text{ et } (x \leq x')\Big].$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $(x,y) R (x,y)$

$x^2+y^2 \leq x^2+y^2$ et $x \leq x$

R est reflexive.

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique : $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2,$

$(x,y) R (x',y') \Leftrightarrow (x',y') R (x,y)$

$x^2+y^2 \leq x'^2+y'^2$ et $x \leq x' \Leftrightarrow x'^2+y'^2 \leq x^2+y^2$ et $x' \leq x$

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. Que peut on en conclure?

$\forall (x,y),(x',y'),(a,b) \in \mathbb{R}_+^2, (x,y) R (x',y')$ et $(x',y') R (a,b) \Leftrightarrow (x,y) R (a,b)$

on peut conclure que c'est une relation d'ordre totale.

Exercice 4 [1] (a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$.

$x^2 < 2$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$x \in]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$

Borne inferieure: $-\sqrt{2}$

le plus petit element : n'existe pas

$\frac{5}{n} \leq 2$

$n \geq \frac{5}{2}$

(b) Dans $(\mathbb{N}^*, \leq)$, déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $B = \left\{n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{5}{n} \leq 2\right\}$.

$5 - 2n \leq 0$

$2n \geq 5$

$n \geq \frac{5}{2}$

$\frac{5}{n} \leq 2$

$\frac{5}{n} - 2 \leq 0$

$\frac{5-2n}{n} \leq 0$

$n \geq \frac{5}{2}$ si $n > 0$

$n \in [\![3 ; +\infty[\![$

Borne superieur : n'existe pas

Borne inferieur : n'existe pas

[1]On pourra utiliser le fait que pour $a \in \mathbb{R}$, les ensembles $[a, \infty[$ et $[a, \infty[\cap\mathbb{Z}$ (resp. $]-\infty, a]$ et $]-\infty, a] \cap \mathbb{Z}$) n'ont pas de plus grand (resp. petit) élément.

Exercice 5. On considère les nombres complexes $z = -1 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 2 + 5\mathrm{i}$.
Déterminer explicitement :

(a) $\bar{z} =$

$|z| =$

$z + z' =$

(b) $z\,z' =$

(c) $\dfrac{z}{z'} =$

Exercice 6. On considère les nombres complexes $z = 3 - 3\mathrm{i}$.
Déterminer explicitement :

(a) $|z| =$

$\dfrac{z}{|z|} =$

(b) Déterminer θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

(c) Donner la forme exponentielle complexe de z. Calculer explicitement et simplifier z^8.

Exercice 7. On considère dans $\mathbb{R}$ le loi de composition interne : $x * y = \ln(e^x + e^y)$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative? $x * y = y * x$

$\ln(e^x + e^y) = \ln(e^y + e^x)$

Vrai

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$A = (x * y) * z = \ln\left(e^{\alpha} + e^{z}\right]$

α

$= \ln\left(e^{\ln(e^x + e^y)} + e^z\right) = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$

$B = x * (y * z) =$

α $\ln(e^x + e^{\alpha})$

$\ln\left(e^x + e^{\ln(e^y + e^z)}\right) = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$

(c) Est ce que la loi $*$ est associative?

oui car $x * (y * z) = (x * y) * z =$

$x * y * z$.

(d) Est ce que la loi $*$ admet une élément neutre?

L1 IEEEA, 2022-2023 Université de Rouen

Léo Glangetas Lundi 4 décembre 2023

Sujet de préparation au CC n° 2 (v2)
UE Logique et structures algébriques

Exercice 1. Soient a et b deux réels, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Montrer que f est une bijection et donner sa fonction réciproque f^{-1}.

$f^{-1} = \frac{y-b}{a}$

Exercice 2. On considère les fonctions réelles : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 + 3$.
Déterminer explicitement $(f \circ g)(x)$:

$2(x^2+3)+1 = 2x^2+7$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
(a) Déterminer $f([1, 2])$.

$1 \leqslant x \leqslant 2$ $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1$

$f([1,2]) = [\frac{1}{4}, 1]$

(b) Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$.

$-1 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1$ $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. $x \geqslant 1$

$\frac{1}{x^2} \geqslant -1$ $x^2 \leqslant -1$ $x \leqslant -1$

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.
(a) Démontrer : $f^{-1}(C \setminus D) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

$f^{-1}(C \setminus D) : \{x \in f^{-1}(C \setminus D)\} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C)$ et

$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ $x \notin f^{-1}(D)$

(b) Démontrer : $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \setminus D)$.

$f^{-1}(C \setminus D) : x \in f^{-1}(C \setminus D)$, $f(x) \in C \setminus D$

$f(x) \in C$ et $f(x) \notin D \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C)$ et

$x \notin f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour (p, q) et $(p', q') \in E$:

$$\big((p,q)\,\mathcal{R}\,(p',q')\big) \iff \big(p+q = p'+q'\big)$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $(p,q)\,R\,(p,q), \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$

$\boxed{p+q = p+q}$ $\boxed{0=0}$

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique :

$x R y \Leftrightarrow y R x$

$(p,q)\,R\,(p',q') \Leftrightarrow (p',q')\,R\,(p,q)$ $p+q = p'+q'$ $p'+q' = p+q$

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive.

$xRy, yRz \Leftrightarrow xRz$

$p+q = a+b$

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$?

R est relation d'équivalence car RST

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = c\ell((n,0))$ la classe d'équivalence contenant $(n,0)$:

$$A_n = \big\{(p,q) \in E \,\big|\, \big((p,q)\,\mathcal{R}\,(n,0)\big\}.$$

Expliciter les classes d'équivalence A_0, A_1 et A_2.

$A_0 \{(0,0)\}$

$A_1 \{(1,0) ; (0,1)\}$

$A_2 (\{0,2\}, \{1,1\}, \{2,0\})$

(f) Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Montrer que $n \neq m$ implique $A_n \cap A_m = \emptyset$.

$p+q=n$

$n \neq m \Leftrightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$

$A_n \{p, -p+n\}$ $A_m \{p, -p+m\}$ $\cancel{p+}\ \cancel{p}+n = \cancel{p}-\cancel{p}+m$

(g) Montrer que $\cup_{n\geq 0} A_n = E$. Que peut on dire sur la famille $(A_n)_{n\geq 0}$?

$n = m$

Donc

$A_n \cap A_m \neq \emptyset$

Donc si $n \neq m$

alors $A_n \cap A_m = \emptyset$

Exercice 6. Si $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$, on écrit de façon unique $z = r\, e^{i\theta}$ avec $0 < r$, et $0 \leq \theta < 2\pi$, et pour $z = 0$, on pose $r = \theta = 0$ (donc $0 = 0e^{i\times 0}$). On considère alors la relation définie sur $\mathbb{C}$:

$$re^{i\theta} \leq r'e^{i\theta'} \iff [(r < r') \text{ ou } (r = r' \text{ et } \theta \leq \theta')] \,.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : $x \mathcal{R} x$.

$re^{i\theta} \leq re^{i\theta} \iff r < r$ ou $r = r$ et $\theta \leq \theta$

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique : $x \mathcal{R} y,\ y \mathcal{R} x \iff x = y$

$r = r'$ et $\theta = \theta'$

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. Que peut on en conclure?

$x \mathcal{R} y,\ y \mathcal{R} z \iff x \mathcal{R} z$

c'est une relation d'ordre car $re^{i\theta}$ et $r'e^{i\theta'}$ sont comparable.

Exercice 7. (a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 3\}$.

$x^2 < 3$

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

Borne supérieure: $\sqrt{3}$ le plus grand élément: n'existe pas

(b) Dans $(\mathbb{Z}^*, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $B = \left\{ n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 2\,n + 9 \geq 0 \right\}$.

$n \in \mathbb{Z}$

$2n \geq -9$

$n \geq -\frac{9}{2}$

$n \geq -4{,}5$

$n \geq -4$

Borne inférieure: -4

$n \in [\![-4; +\infty[\![$ le plus petit élément: -4

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^+$ le loi de composition interne : $\quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative ($\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x * y = y * x$?)

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2}$

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}^+$:

$A = (x * y) * z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x*y)^2+z^2}$

$B = x * (y * z) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}$

Pareille

(c) Est ce que la loi $*$ est associative? $= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

oui car P_1 de A = P_2 de B.

(d) Elément neutre : Montrer qu'il existe un élément $e \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x*e = e*x = x$.

$\sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{0^2+x^2} = \sqrt{x^2} = x$

(e) Quels sont les éléments x de $\mathbb{R}^+$ qui admettent une élément symétrique? (c'est à dire il existe $x' \in \mathbb{R}^+$ $x * x' = x' * x = e$)

$\sqrt{x^2+y^2} = 0$

$y^2 = -x^2$

$x^2+y^2=0$

non car x^2 est contraire.

Exercice 9. (a) On rappelle que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif. Montrer que l'application $f(z) = z^4$ définit un morphisme de $\mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{C}^*$:

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}^*, \quad f(z \times z') = f(z) \times f(z').$$

$z^4 = 1$

$f(z \times z') = z^4 \times z'^4$

$z = -1$ ou 1 ou $-i$ ou i

$f(z \times z') = f(z) \times f(z')$.

(b)[1] Expliciter l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

$z^4 = \{1, -1, i, -i\}$

[1]On pourra utiliser : Pour $k \in \mathbb{Z}$ il existe un unique $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k = 4q + r$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

L1 IEEEA, 2022-2023
Université de Rouen

Préparation au CC n° 1 - Lundi 7 novembre 2022

$x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C$

Exercice 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

$(x \notin A$ et $x \notin B$ et $x \notin C)$

(a) Proposition P : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 < 1)$ ou $(n > 2)$.

(b) Proposition Q : Il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$.

Exercice 2. On considère des propositions P et Q de valeurs de vérité quelconques.

(a) Écrire la table de vérité de la proposition : $(P$ ou $Q)$ et $(\neg P$ ou $Q)$

(b) Que peut-on en déduire ?

$f^{-1}(B)$

Exercice 3. Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse.

$\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$\longrightarrow [-2, 2]$

$\boxed{-2 \leqslant \frac{1}{x^2}} \leqslant 2$

(a) Proposition P : $\forall p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}, p + q < 2$

(b) Proposition Q : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy > 1$

$f^{-1}(B)$ $\quad B \quad \frac{1}{x^2} \quad \frac{1}{x^2} + 2 \geqslant 0 \quad \frac{1 + 2x^2}{x^2} \geqslant 0$

Exercice 4. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $100^n - 1$ est un multiple de 99.

Exercice 5. Soit un ensemble E et A, B et C des parties de E. Démontrer que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$, et soient les parties $A = [1, 2]$ et $B = [-2, 2]$.

(a) Déterminer $f(A)$ (en le justifiant).

(b) Déterminer $f^{-1}(B)$ (en le justifiant).

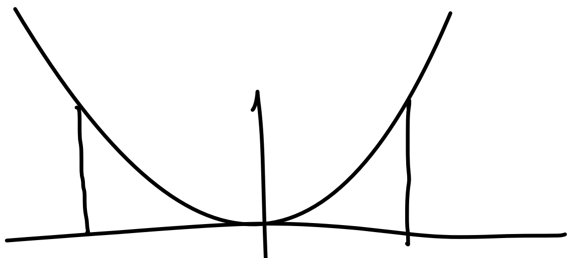
$0 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 2 \qquad x^2 \geqslant \frac{1}{2}$

$x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifier vos réponses.

(a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x + 3$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.



$0 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 2$

$-\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \sqrt{2} \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$